

۱۳

۲۰۱

س



سازمان اسناد و کتابخانه ملی  
جمهوری اسلامی ایران



سازمان اسناد و کتابخانه ملی  
جمهوری اسلامی ایران



از آثار مؤلف که به چاپ رسیده

زمین شناسی	برای سال سوم دبیرستان
دوره تشریح انسان الوان	چاپ دوم در ۱۰ قطعه
دوره نباتات	در ۱۲ قطعه
دوره فسیل شناسی	در ۳ قطعه
عهد چهارگانه الوان	در یک قطعه
طبقات الارض	"
نقشه هیئت و آسمان الوان	در ۲ قطعه
فورمولر ریاضی برای سال پنجم و ششم علمی	چاپ دوم

آنچه در زیر چاپ است

دوره حیوانات	در ۱۰ قطعه
دوره سنگ شناسی	" ۲ قطعه
دوره میکروب شناسی	" ۱ قطعه





- ۶- فرع - اجسام بواسطه سطوح قابل انقسامند  
۷- تعریف - سطح را ممکن است محدود یا نامحدود تصور کرد در صورت اول حد <sup>سطح</sup> خط گویند (میتوان خط را حد فاصل یا فصل مشترک بین دو سطح منبسط تصور نمود)

- ۸- فرع - سطوح بواسطه خطوط قابل انقسامند  
۹- تعریف - حد فاصل دو خط یا مطلقاً حد خط را نقطه گویند  
۱۰- فرع - برای تحدید خط دو نقطه کفایت میکند  
۱۱- فرع - خطوط بواسطه نقاط قابل انقسامند  
۱۲- تعریف - حجم و سطح و خط و نقطه را مطلقاً شکل گویند  
۱۳- فضا دارای سه بُعد است که عموماً به کلمه طول . عرض . عمق  
تعبیر میشود پس میتوان فهمید که در اشکال هندسی  
اولاً - حجم مشتمل بر سه بُعد است و در اجسام مادی ابعاد ثلثه بر حسب مقام اساسی  
مختلف دارند

سوالات - ۱- اساسی سه بُعد اطلاق صحت - ۲- سه بُعد دیوار چه نام دارند



۳- سه بُعد حوض را اسم ببرند

ثانیاً - سطح شامل دو بُعد است که عموماً آنها را طایفه عرض گویند



سؤال ۱- دو بُعد کف اطاق چه نام دارد؟ - ۲- دو بُعد دیوار اطاق چیست؟

ثالثا - خط یک بعد بیش ندارد که آنرا محسونا طول نامند

سؤال ۱- بُعد طول نیز چه نام دارد؟ - ۲- اسم بعد قصر نیز چیست؟ - ۳- فاصله ما بین

و کف اطاق چه نام دارد؟ - ۴- کلمه که مشترکاً جواب این هر سه سؤال باشد چیست؟ (طول)

رابعا - نقطه دارای هیچیک از ابعاد نیست و بنا بر این نقطه ضابطت موهوم

## ب - تولید اشکال بواسطه حرکت

۱۴- هرگاه نقطه در فضا تعقیب مکان دهد معبر سیر آنرا خط گویند و بعبارة اخری خط

شکل است که از حرکت نقطه در فضا تولید میشود

سؤال ۱- شکلی که از حرکت نوک مداد یا قلم (دقیقی ابعاد جسم فوق العاده کوچک باشد آنرا

بطور ساده نقطه گوئیم) بر صفحه کاغذ تولید میشود چیست؟ - ۲- وقتی نوک سوزنی را روی گلوله

کشم چه شکلی تولید میشود

۱۵- فرع - چون نقطه دارای ابعاد نیست معبر حرکتش بیش از یک بعد (طول) ندارد

۱۶- هرگاه خط در جهتی غیر از طول خود تعقیب مکان دهد معبرش سطح است

سؤال ۱- وقتی سیوه را با چاقو میبریم معبر کن را چاقو (خط) چیست؟ - ۲- وقتی با تاره

چوبی را میبریم از حرکت دندانهای تاره (خط) چه شکلی تولید میشود؟



- ۱۷- فرع - چون خط که مولد سطح است یک بُعد دارد سطح شامل دو بُعد می‌شود  
 ۱۸- هرگاه یک قطعه سطح در جتی عبیر از طول و عرض خود حرکت کند معبرش

جسم است

- سؤال - اگر صفحه تخت را در جسی نرم بفشارد داخل نمایم چه شکلی تولید می‌شود  
 ۱۹- فرع - چون سطح که مولد حجم است دو بُعد دارد حجم دارای ابعاد سه گانه می‌گردد  
 ۲۰- از حرکت جسم مجدداً حجم (جسم) تولید می‌گردد  
 مثلاً وقتی یک میخ بدیوار می‌کوبیم جای آن حجم است یا وقتی چندین کتاب را روی  
 یکدیگر می‌چینیم حجمی جدید حاصل می‌شود  
 ۲۱- نتیجه - (از اندازه ۲۰) از آنچه مذکور شد معلوم می‌شود که اشکال فضائی  
 منحصر در چهار نوع است حجم . سطح . خط . نقطه  
 ۲۲- تعریف - علمی که موضوعش تحقیق و بحث در خواص و وضع و صورت و  
 وسعت اشکال مذکور است بعلم هندسه موسوم گردیده است (کلمه هندسه  
 مترب انداز است)

ج - خط مستقیم و سطح مستوی

- ۲۳- تعریف - هرگاه نقطه در حین حرکت جهت حرکت خود را ابتدائاً تغییر ندهد





معیار آن را خط مستقیم با اختصار مستقیم گویند

X میتوان مستقیم را بطریق ذیل نیز تعریف نمود

X هرگاه بر خطی دو نقطه فرض شود و چنان تصور کنیم که خط حول این دو نقطه دوران کند (مانند نخ ممسودی که تابیده شود) اگر از این حرکت برای خط تعبیه مکان حاصل نشود آنرا مستقیم نامند

۲۴- فرع - خط مستقیم از طرفین نامحدود است

۲۵- فرع - مابین دو نقطه بیش از یک مستقیم وجود ندارد و بنا بر این خط مستقیم بواسطه دو نقطه خود کاملاً مشخص میگردد

X ۲۶- فرع - اگر دو مستقیم دو نقطه مشترک داشته باشند منطبق و شته شده یک مستقیم میشوند

X ۲۷- نتیجه ۱- دو مستقیم متمایز نمیتوانند بیش از یک نقطه مشترک داشته باشند و در اینصورت آنها را مستقیم طاع گوئیم

۲۸- نتیجه ۲- بر یک نقطه ممکن است مدده‌های خطی مستقیم مرور داد

۲۹- تشریح ۱- نقطه را با یکی از حروف الفبا تعیین میکنند و برای تمایز

جمهور مانیر الفبای کتابی و بزرگ لاتین را بجای این مقصود اختیار میکنیم





موافق این تشریح را در خط مستقیم بوسیله دو حرف مشخص میگرد

۳۰- تعریف - هرگاه نقطه متحرک  $P$  بر خطی مستقیم از  $A$  تا  $B$  حرکت کند گویند این نقطه خط  $AB$  را پیموده

و اگر بالعکس از  $B$  تا  $A$  حرکت نماید

گویند نقطه  $P$  خط را در جهت  $BA$  طی کرد

مس

و دو جهت  $AB$  و  $BA$  را مخالف یکدیگر گوئیم

۳۱- هرگاه سطح مسطح و سطح کره جزائی را مثلاً با یکدیگر بسیم و از آنها مختلف

می یابیم و از اینجا دو نوع سطح تشخیص میدهم

۳۲- تعریف ۱- سطح مستوی - یا صفحه سطحی است که چون نقطه بختیار در

آن فرض نموده بر آن نقطه خطوط مستقیم بختیار مرور دهیم جمیع آنها یکی در سطح مفروض واقع شوند

۳۳- تعریف - اشکال مستویه اشکالی هستند که جمیع اجزای شان در یک سطح مستوی واقع

و قسمتی از هندسه که در باب این قسم اشکال است بسطحات یا هندسه سطحی موسومند



۳- جمع و تقسیر این قطعات

۳۴- تعریف - خط شعاعی مستقیم است که از یک طرف محدود و با نقطه

سازمان شده و در جهت بی





آن را مبدأ شعاع نامیم

۳۵- تعریف - قطعه مستقیم یا بالاختصار قطعه مستقیمی است که از طرفین محدود باشد

یکی از دو طرف را مبدأ و دیگری را منتهای قطعه خوانیم

۳۶- فایده - مقدار قطعه یا فاصله دو انتهای آن عبارت است از طول قطعه

که با واحد طول سنجیده میشود و معمولاً قطعه را یا بواسطه دو حرف مبدأ و منتهای

که همواره حرف مبدأ را مقدم میداریم و یا بواسطه یک حرف کوچک که توی لایه

تعیین میکنیم ( در صورت اخیر بیشتر انداز و عددی قطعه مقصود است )

۳۷- تعریف - دو قطعه را متساوی گوئیم در صورتیکه اگر یکی را بر دیگری

منطبق نمائیم که مبدأ بر مبدأ واقع شود و منتهای نیز بر منتهای منطبق گردد و یا بالعکس

سؤال - در چه صورت قطعه را اقصی ( < ) از قطعه دیگر گوئیم - ۲ - در چه صورت

قطعه منفرجه از طول ( > ) و از قطعه دیگر است

۳۸- تعریف - هرگاه قطعه  $AB$  را از  $B$  به بعد با اندازه قطعه دیگر

$CD$  امتداد دهیم گوئیم که  $CD$  بر قطعه  $AB$  افزوده شده و قطعه





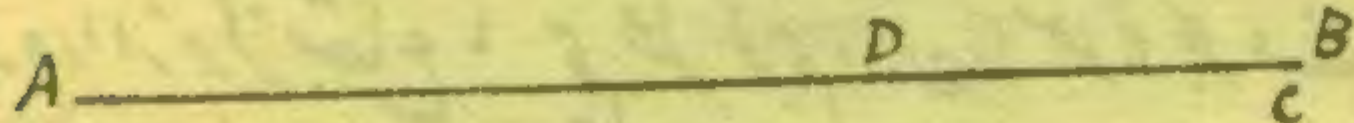
AD را مجموع نامند  $AB + BD = AD$

۳۹- تعریف - اگر بفرم اینک  $AB > CD$  باشد قطعه  $CD$  را بر

AB چنان منطبق کنیم که مبدأ  $CD$  بر سرتهای  $AB$  واقع شود گویند قطعه

CD از قطعه  $AB$  تقسیری شده و قطعه  $AB - CD$  یا  $AD$  را تفاضل

دو قطعه گویند



$$AB - CD = AD$$

۴۰- تعریف - هرگاه دو قطعه متساوی را با هم جمع کنیم نقطه مشترک در وسط مجموع

و مجموع را مضاعف هر یک از دو قطعه گوئیم

۴۱- فرع - چون میتوان هر قطعه را مجموع دو قطعه متساوی دانست معلوم

میشود که هر قطعه یک نقطه وسط دارد

## هـ - دایره و مکان هندسی

۴۲- هرگاه خط شعاعی حول مبدأ خود نقطه  $M$  را دور آن بگذراند

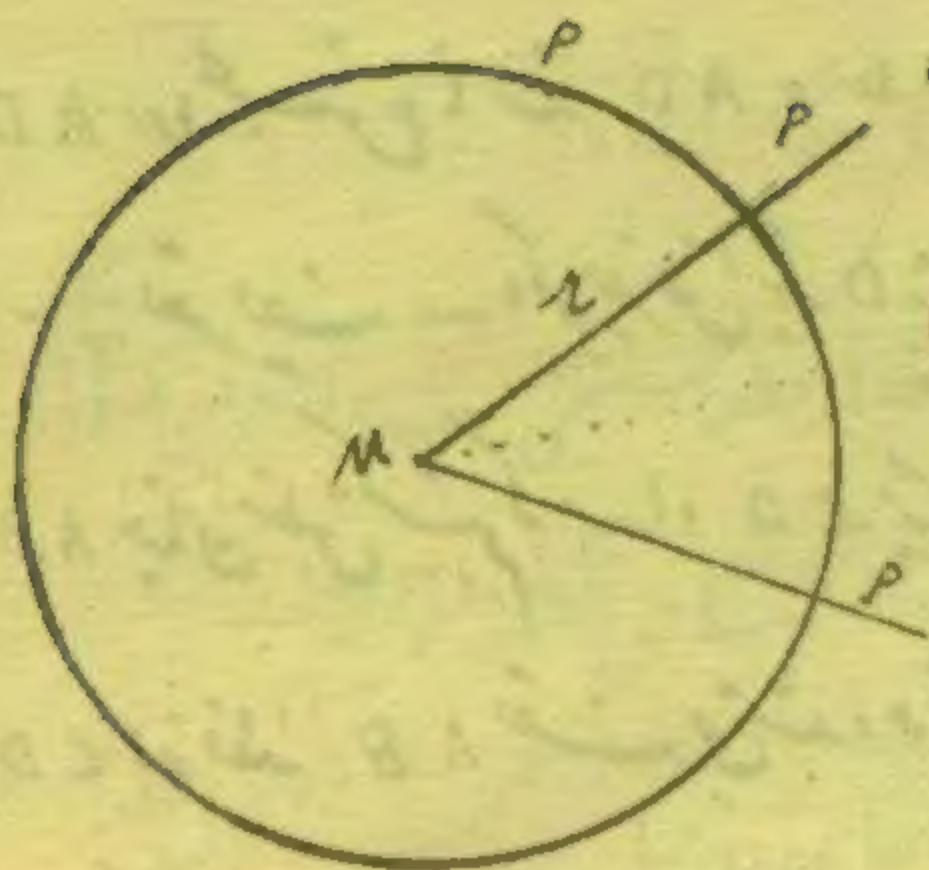
از نقاط آن مانند  $P$  خطی رسم میکند که جمیع نقاطش از نقطه  $M$  با فاصله  $MP$



واقع شده و این خط منحنی است

۴۳- تعریف - خط منحنی معبر نقطه متحرکی است که دائماً جهت حرکت خود را تغییر میدهد





۴۴ - تعریف - محیط دایره خطی است  
منحنی که جمیع نقاطش از نقطه معینی موسوم  
به مرکز یک فاصلہ واقع باشد

۴۵ - تعریف - فاصلہ هر نقطه محیط

دایره را از مرکز شعاع یا نیم قطر گوئیم و آن را معمولاً بحرف  $r$  می‌نمایم

۴۶ - فرع - جمیع نیم قطری دایره متساویند

۴۷ - تعریف - قطعه مستیمی که از مرکز مرور نموده و از طرفین محیط دایره  
ختم شود به قطر دایره موسوم است

۴۸ - فرع - در دایره همه وضع جمیع اقطار متساویند

۴۹ - فرع - مرکز دایره جمیع اقطار را نصف میکند

۵۰ - فرع - دایره بواسطه مرکز و شش گوش کاملاً مشخص میشود و باین نسبت

وقتیکه بخوانیم دایره را که مرکزش نقطه  $m$  و شعاعش بطول  $r$  باشد بنویسیم  
پسین می‌نویسیم (  $m, r$  )

۵۱ - فرع - هر نقطه که فاصلہ اش از مرکز مساوی شعاع باشد بر محیط دایره

و هر گاه فاصلہ اش بیش از شعاع باشد در خارج و الا در داخل دایره است





۵۲- تعریف - مکان هندسی شکلی است که نقاطش دارای خاصیت معینی باشد بشرط اینکه افتاد خارج آن از این خاصیت عاری باشند

۵۳- مکان هندسی ۱- محیط دایره (  $\Gamma$  و  $\Delta$  ) مکان هندسی نقاط است که از نقطه  $\Delta$  بفاصله  $\Gamma$  واقع باشند (استنباط از فرع ۵۱)

## تمرینات

مسئله ۱- مطلوب است تعیین نقطه‌ای که از نقطه معین  $\Delta$  بفاصله  $\Gamma$  واقع باشند

حل مسئله - بدو مقیاس (ساز و مدرج یا ششبر و سیمبر) فاصله  $\Gamma$  را (مداوم یا مرکبی) مساوی ۵ سانتیمتر بگیریم و باین شعاع از مرکز  $\Delta$  دایره رسم میکنیم محیط دایره جواب مسئله است

مسئله ۲- مطلوب است تعیین نقطه‌ای که از دو نقطه  $\Delta$  و  $\Gamma$  بفاصله  $\Gamma$  و  $\Delta$  باشد

مسئله ۳- مطلوب است یافتن نقطه‌ای که از مسد  $\Delta$  بفاصله  $\Gamma$  و  $\Delta$  باشد

مسئله ۴- کدام است نقطه از مستقیم  $\Delta$  که از نقطه خارجی  $\Gamma$  بفاصله  $\Gamma$  و  $\Delta$  باشد



باشد عدد چنین نقاط چند است و شرط ارکان مسدودیت (باید دایره  $(O و C)$  خط  $AB$  را قطع کند

مسئله ۵۳ - بر محیط دایره  $(O و M)$  نقطه تعیین کنید که از نقطه مفروضه  $A$  در خارج

دایره  $O$  فاصله داشته باشد در چه صورت مسدودیت

## و - قوس و تقسیم محیط دایره

۵۴ - تعریف - چون بر محیط دایره دو نقطه فرض کنیم قسمتی از محیط را که

ما بین این دو نقطه میانه قوس نامیم

۵۵ - فرع - هرگاه دو دایره بیک شعاع باشند قوسهای آنها بر یکدیگر قابل

انطباق میباشند بطوریکه میتوان بوسید انطباق دو قوس از یک دایره یا

دو دایره متساوی را با یکدیگر سنجید. لیکن اگر دو شعاع یعنی دو دایره متساوی

نباشند قوسهای آنها قابل انطباق نیستند و سنجیدن آنها بیکدیگر بوسید

انطباق امکان ندارد

۵۶ - تجربه - هرگاه چندین دایره متحد المركز رسم نموده یکی از آنها

بقوسهای متساویه قسمت نموده از مرکز بفتاط تقسیم وصل کرده است و دو قسم

بوسید کرد و این دایره منقسمه حول مرکز معلوم میشود که این خطوط شعاعی



سایر دوائر را نیز بر قوسهای متساویه قسمت کرده اند

۵۷ - تعریف - چون محیط دایره را بر ۳۶۰ قوس متساوی تقسیم کنیم هر یک را

قوس یک درجه یا بالأختصار درجه نام

۵۸ - فرع - طول قوس یک درجه با طول شعاع تغییر میکند

۵۹ - تعریف - قوس را گوئیم به (الف) درجه است وقتی که

شمال  $\frac{1}{360}$  محیط دایره خود باشد

۶۰ - فایده - عدد درجات قوس مفروض را بوسیله (نقال) که نمیدار

برنجی یا شاخی منقسم به ۱۸۰ درجه است معلوم میکند با این طریق که مرکز گفتاله را بر مرکز

قوس منطبق بینمایند تا دو شعاعی که مبدأ و انتهای قوس گذشته عدد درجات

آنها بر محیط نقاله شش کند

## ز - زاویه و اندازه آن

۶۱ - تعریف - هرگاه دو خط شعاعی از یک مبدأ خارج شوند شکل حاصل را

زاویه نامند (۸) دو خط شعاعی را دو ضلع زاویه و مبدأ مشترک را

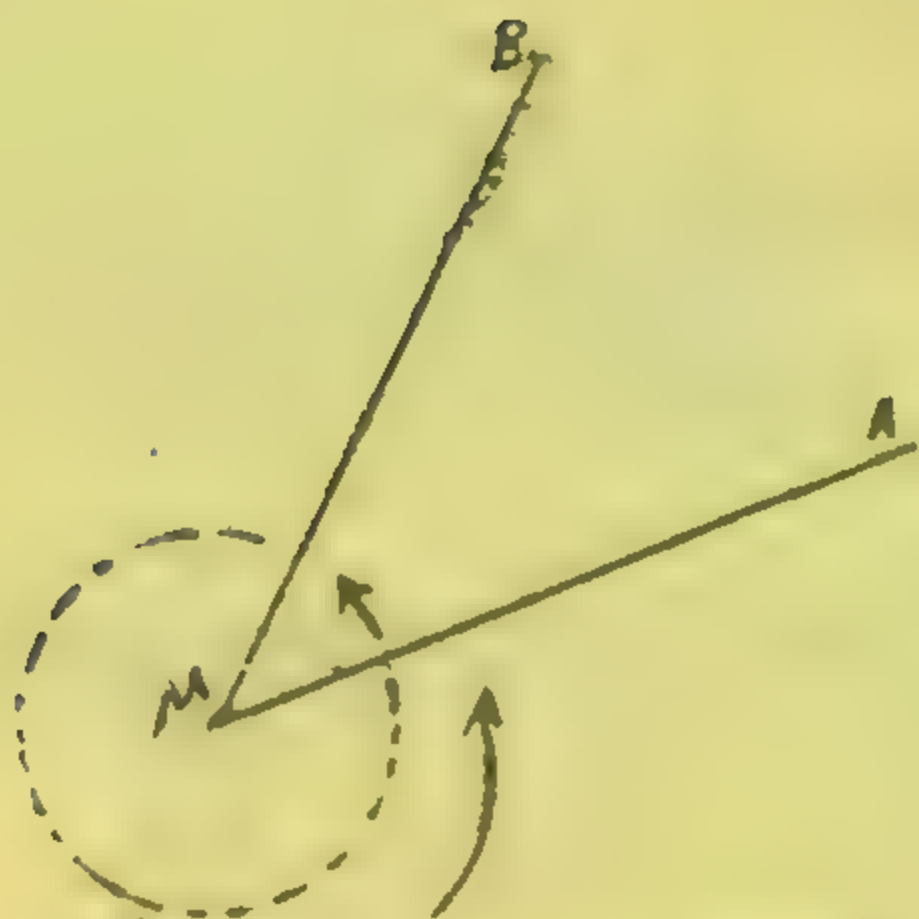
رأس زاویه خوانند

۱ میتوان چنین تصور کرد که شعاع  $MB$  است از گردش شعاع  $MA$  حول  $A$



نقطه حاصل شد باشد و از این تصور

دو فرع ذیل نتیجه میشود



۶۳ - فرع - هرگاه خطی شعاعی حول

مبدأ خود دوران کند زاویه تولید نماید

۶۴ - فرع - شعاع MB بدو وجه از دوران شعاع MA حاصل میگردد

موافق اینکه دوران از راست بچپ یا از چپ بر راست است هر دو شعاعی

MA و MB دو زاویه تکمیل داده اند اما معمولاً مقصود از زاویه بین دو خط

زاویه کوچکتر است

۶۵ - تشریح داد - برای تسهیل کتابت قلمها اغلب زوایا را با حروف

یونانی کوچک (بجای اول کتاب رجوع شود) تعیین میکنند گاهی نیز زاویه را با حروف

میخوانند بشرطیکه حرف راس در وسط واقع شود

۶۶ - تعریف - هرگاه زاویه B (بتا) را بر زاویه به چنان منطبق کنیم که

راس و یک ضلعشان مشترک گردد و در آن حالت ممکن است اتفاق افتد

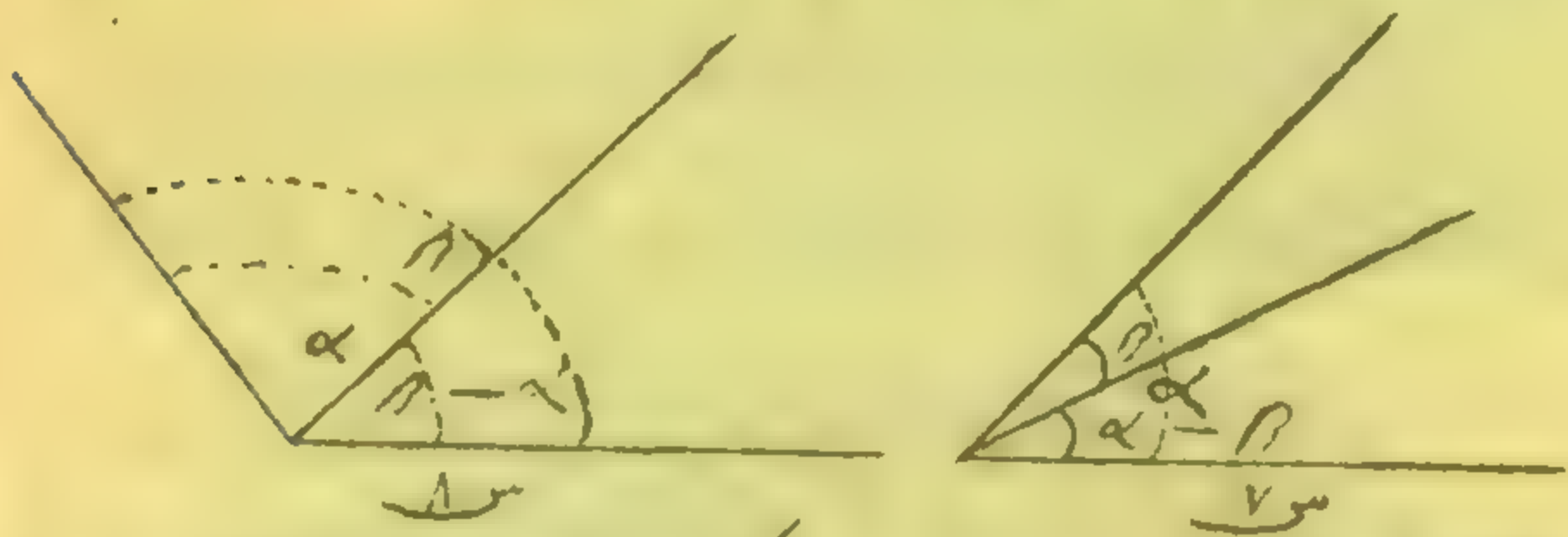
اولاً - اگر ضلع دوم هر دو ضلع دوم به منطبق شود و سطح دوم زاویه را تقاطی

کنیم





ثانیاً اگر ضلع دوم  $B$  مابین دو ضلع  $a$  و  $c$  واقع شود  $B$  را کوچکتر از  $a$  گوئیم



ثالثاً اگر ضلع دوم  $B$  نسبت به دو ضلع  $a$  و  $c$  در یک طرف یعنی خارج از زاویه  $a$  افتد  $B$  را بزرگتر از  $a$  گوئیم

۶۶- فایده - در ضمن دوران خط شعاعی که ضلع زاویه فرض شده هر نقطه آن قوسی رسم میکند که بر حسب مقدار دوران یعنی مقدار زاویه کوچک یا بزرگست عبارت از بزرگترین یا کمترین مقدار زاویه تغییر میکند اما بر حسب جهت مساویند و بنا بر این ممکن است زاویه را بوسیله قوسی که از مرکز رأس آن بین دو ضلعش رسم شده باشد سنجید

۶۷- تعریف - واحد زاویه زاویه ایست که قوس مقابلش (قوسی که بر مرکز رأس مابین دو ضلع رسم شود) قوس یکدرجه باشد و آن را زاویه یکدرجه یا باختصار درجه (°) نامند

۶۸- فرغ - زاویه نه زاویه ایست که قوس مقابلش به برابر قوس یکدرجه باشد از این فرغ استنباط میشود که زوایا را نیز بوسیله آنست تقاله میتوان اندازه گرفت



۶۹ - تشبیه - باید دانست که برای سنجیدن زوایای کوچکتر از یک درجه از

بر ۶۰ دقیقه (۱) و یک دقیقه را بر ۶۰ ثانیه (۲) منقسم ساخته اند

۷۰ - فرع - زوایا و قوسهای دایره را میتوان مقدار دوران خط شعاعی دانست

و اندازه آنها اختلاف بین امتداد و خط را معین میکند

۷۱ - تعریف - هرگاه زاویه  $\alpha$  را طوری قرار دهیم که رأس و ضلعش با زاویه

$B$  مشترک باشد  $\alpha$  و  $B$  را دو زاویه مجاور گوئیم حال اگر  $\alpha$  بر  $B$  منطبق نباشد

یعنی هرگاه ام در یک طرف ضلع  
مشترک واقع باشند و ضلع مشترک



را مخدوف فرض کنیم زاویه حاصله مجموع  $\alpha$  و  $B$  گوئیم  $\alpha$  و  $B$  بر  $B$  منطبق

و کوچکتر از آن باشد از حذف ضلع مشترک زاویه حاصل میشود

که آن را فضل  $B$  بر  $\alpha$  یا بالاختصاص فضل



$B$  و  $\alpha$  گویند  $\alpha$

ح - اوضاع نسبی دو زاویه - زوایای مخصوصه


۷۲ - وقتی دو مستقیم تقاطع میکنند چهار زاویه تولید میشود

تعریف - دو زاویه را که از تقاطع دو مستقیم حاصل شده و یک ضلعشان



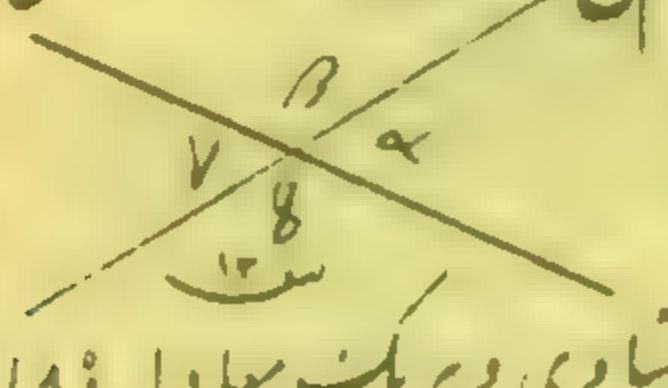
مشترک باشد مجانبه یکدیگر اصطلاح میکنیم  $\alpha$   $\beta$  (۵۰)

۷۳- تعریف - دو زاویه را که از تقاطع دو مستقیم حاصل شده و دو ضلع هر یک

استاد و ضلع دیگر است متقابل بر آن گویند   $\alpha$   $\beta$

۷۴- تعریف - زاویه دو قائمه یا نیم سطح زاویه ایست که دو ضلعش بر یک مستقیم

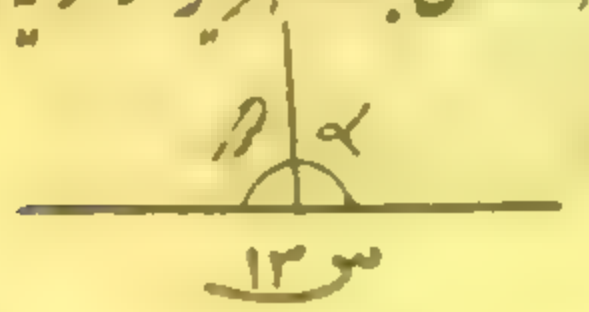
باشند

۷۵- فرع - جمیع زوایای نیم سطحی متساوی و هر یک معادل  $180^\circ$  است   $\alpha$   $\beta$

۷۶- تعریف - زاویه را مقعر گوئیم وقتی که چکته از نیم سطح باشد

و محدب خوانیم هرگاه بزرگتر از آن باشد

۷۷- تعریف - هرگاه دو زاویه مجانبه متساوی باشند هر یک را زاویه قائمه

یا بالاختصار قائمه نامند  $\alpha$   $\beta$  (۵۱)   $\alpha$   $\beta$

۷۸- فرع - زاویه قائمه نصف زاویه نیم سطح است پس جمیع زوایای قائمه

متساوی و هر یک معادل  $90^\circ$  میباشد

۷۹- تعریف - هر یک از دو ضلع زاویه قائمه را بر ضلع دیگر عمود گویند

۸۰- تعریف - زاویه را حاده یا منفرجه گوئیم موافق آنکه کوچکتر

از قائمه یا بزرگتر از آن باشد



## فصل دوم - احکام راجع بر وایا

۱ - قضیه - اقام برهان - علوم متعارفه

۸۱ - هرگاه درشکلی بعضی خواص و شرائط را محقق شماریم آن خواص و شرائط را

فرض یا مفروضات (ف) گوئیم و اگر از فرض خواص یا خاصیت جدیدی

برای شکل استنباط شود آنرا حکم (ح) نامند

۸۲ - فرض و حکم را من حیث المجموع قضیه نامند و تحت قضیه بواسطه برهان

که یک رشته استدلال منطقی است معلوم میشود

۸۳ - وسائل استدلال یا قضایانیت که قبلاً محقق شده باشد یا مطالبی است که بنفسه محقق

بوده و محتاج برهان نباشد و بعبارة آسنه دی از بدیهیات شمرده شود

در هندسه از چنین حقایق که به علوم متعارفه موسومند مدّه قیلبی در کار است

از این مقدار

(ا) کل بزرگتر است از جز و خود

(ب) کل مساویست با مجموع اجزای خود

(ج) هر یک از دو مقدار متساوی را میتوان بجای دیگری قرار داد

مثلاً اگر  $a = b$



باشد

$$\underline{b + c = d}$$

خواهد بود

$$a + c = d$$

پس میند

(د) دو مقدار مساوی با مقدار ثالث خود متساویند

$$a = c$$

مثلاً اگر فرض شود

$$\underline{b = c}$$

نتیجه میشود  $a = b$  (می توان بگویم از حکم سابق استنباط نمود)

(ه) هرگاه دو مقدار مساوی را بر دو مقدار مساوی دیگر افزود

یا از آنها بکاهیم دو مجموع یا دو تفاضل متساویند

$$a = c$$

مثلاً اگر

$$\underline{b = d}$$

$$a + b = c + d$$

در نتیجه

$$a - b = c - d$$

(و) هرگاه دو مقدار مساوی را در دو مقدار مساوی دیگر

ضرب یا بر آنها تقسیم کنیم دو حاصل ضرب یا دو خارج قسمت متساویند.



مثلاً اگر

$$a = c$$

و

$$b = d$$

$$\frac{a \times b = c \times d}{}$$

معلوم است که

$$a : b = c : d$$

و

۸۴ - هرگاه تحت قضیه بواسطه استمال علوم متعارف با قضایه قبلاً محقق شده باشد

و یا بواسطه فرض قضیه معلوم شود برهان را مستقیم گویند

اگر اثبات قضیه بدین طریق کنند که تصور صورت دیگر برای قضیه منجر بقبول هر

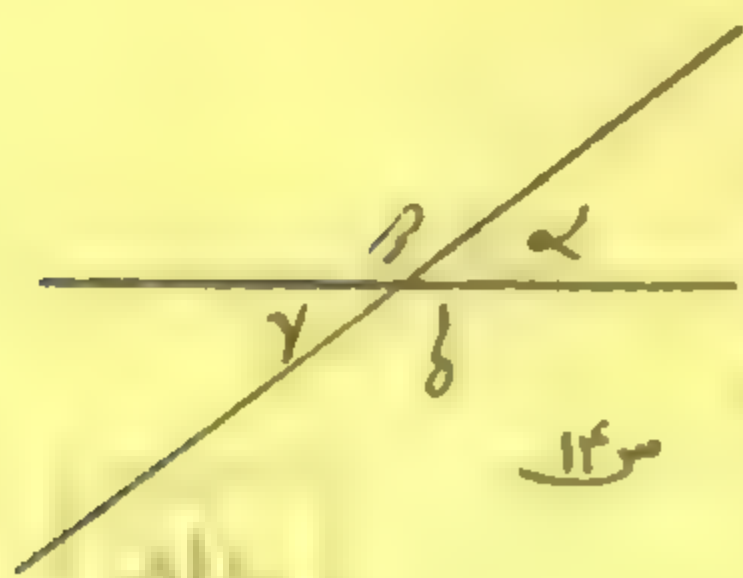
محالی از قبیل تناوی جنبه و کل و امثال آن میگردد برهان را برهان

خلف نامند

ب - زوایای مجانبه و متقابل بر رأس

۸۵ - قضیه ۱ - مجموع دو زاویه مجانبه دو قائمه است

حکم -  $\alpha + \beta = 180^\circ$



زیرا چون دو زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  را جمع کنیم

یک زاویه نیم سطح حاصل میشود و زاویه

نیم سطح مضاعف زاویه قائمه است (تعریف) غرض



۸۶- تعریف - نتیجه حکمی است که با فاصله از قضیه استنباط می‌شود  
 ۸۷- نتیجه - هر زاویه مساویست با فضل ۲ قائمه بر زاویه مجانبه خود  
 مثلاً در س ۱۳ -  $\alpha = ۲$  قائمه یا  $\alpha = ۲ - ۲ = ۰$  قائمه در

۸۸- قضیه - دوزاویه متقابل بر رأس قائم‌اند

$$(ح) \quad \alpha = ۲ \quad \text{و} \quad \beta = ۰$$

(ب) -  $\alpha$  و  $\gamma$  رازاویه در مجانبه است پس نتیجه (ا)

$$\beta - \alpha = ۲ \text{ قائمه}$$

$$\beta - \gamma = ۲ \text{ قائمه}$$

پس معلوم می‌شود (ج)  $\alpha = \gamma$

۸۹- تعریف - قضایای نیکه درجه دوم اهمیت باشند بعنوان فرع ذکر

خواهند شد

۹۰- فرع - هرگاه یکی از چهار زاویه که از تقاطع دو مستقیم حاصل می‌شود قائم باشد

سه زاویه دیگر نیز قائم اند

راه برهان - استمال ق (دوزاویه مجانبه) و ق ۲ (دوزاویه متقابل)

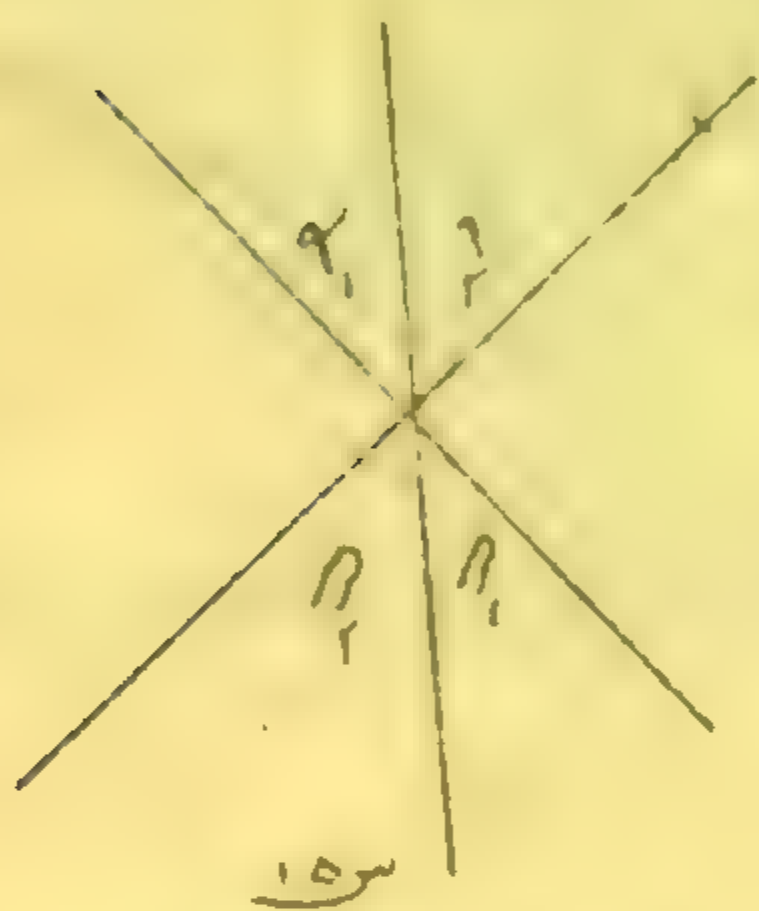
وسید اثبات این حکم می‌شوند



۹۱- فرع - منصف هر یک از دو زاویه متقابل براس منصف دیگر است

(ف) س ۱۵  $\alpha_1 = \alpha_2$  ( بخوانید  $\alpha$  زیر و یک  $\alpha$  زیر و ۲ )

(ح)  $\beta_1 = \beta_2$



(ب) چون فرض  $\alpha_1 = \alpha_2$

واقف  $\alpha_2 = \alpha_1$

پس معلوم متقابل اب  $\beta_1 = \beta_2$

ولی  $\beta_2 = \beta_1$

و بنا بر این معلوم متقابل (ج)  $\beta_1 = \beta_2$

۹۲- فرع - منصف دو زاویه مجانبه بر یکدیگر عمودند

(ف) س ۱۶  $\hat{CDE} = \hat{ADE}$  ,  $\hat{CDO} = \hat{BDO}$

(ح)  $DG \perp EF$  (علامت  $\perp$  را عمود بر بخوانید)

(ب) چون  $\hat{CDG} = \hat{BDG}$  (بف)

(بف)  $\hat{CDF} = \hat{ADE}$

پس  $\hat{CDG} + \hat{CDE} = \hat{BDG} + \hat{ADE}$  (علوم متقابل (ح)

ولی  $\hat{ADE} = \hat{PDF}$  (مستابذ)



پس  $\widehat{CDG} + \widehat{CDE} = \widehat{BDG} + \widehat{BDE}$  (علوم متعارف ج ۱)

یعنی  $\widehat{GDE} = \widehat{GDF}$

و بنا بر این  $GD \perp EF$   
 (برشعلم است که اینکم را بران دیگر متکی بر علوم  
 متعارف و ثابت کنند)

۹۲ - قضیه ۲ - از نقطه منفرجه بر خط مستقیم میتوان یک  
 عمود بر آن اخراج نمود

زیرا خط مستقیم زاویه نیم سطحی است که نقطه منفرجه رأس آن باشد و عمود مطلوب  
 باید زاویه قائمه تشکیل دهد و بنا بر این منصف نیم سطح باشد و هر زاویه یک منصف  
 دارد و نه بیش

بوسینه دوران ضلع مشترک بین دو زاویه مجانبه که رأسشان نقطه مفروضه  
 باشد نیز واضح میشود که اخراج یک عمود ممکن بیش از یک عمود ممکن نیست زیرا که در این  
 نقطه در یک وضع دو زاویه مجانبه متادیه قائمه میشوند

احکام قرینی در زوایای مستقیم

حکم ۱ - هر دو زاویه متادیه باشند



اولا - هر يك با متقابله بر ايس ديگري مساويت

ثانيا - دوزاويه متقابل بر ايس آنها مساويند

ثالثا - هر يك مكمل مجانبه ديگري است

(دوزاويه را مكمل گوئيم وقتيكه مجموعشان نيم سطح يعنى دو قائمه باشد)

رابعا - دو مجانبه زاويه اى منفرصه مساويند

برهان حكم اخير س ۱۷ (ف)  $\hat{a} = \hat{a}'$  (بخوانيد)

(ح)  $\hat{b} = \hat{b}'$

(ب) چون  $\hat{b} = \hat{a} - \hat{r}$  (مجانسه)

و بعضى  $\hat{a} = \hat{a}'$

پس معلوم متعارف (ج)  $\hat{b} = \hat{a} - \hat{r}$

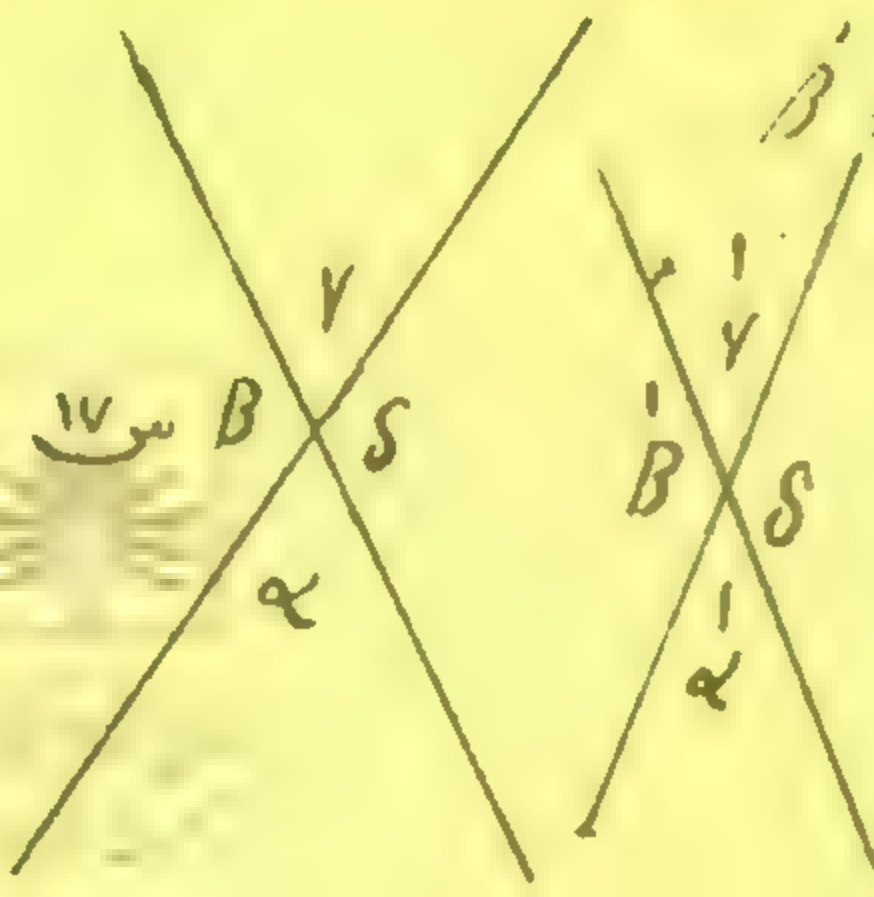
ولى  $\hat{b} = \hat{a} - \hat{r}$  (مجانسه)

بنابر اين معلوم متعارف (د)  $\hat{b} = \hat{b}'$

حكم ۲ - هرگاه دوزاويه مكملى باشند

اولا - هر يك با متقابله بر ايس ديگري متساويت

ثانيا - دو متقابله بر ايس آنها مكملى اند





ثالث - هر یک با مجانبه دیگری مساویست

رابطا - دو مجانبه آنها یکدیگر



برهان قسمة دوم حکم است

$$(ف) \quad \alpha + \beta = \gamma + \delta$$

$$(ح) \quad \alpha + \beta = \gamma + \delta$$



(ب) چون  $\alpha = \gamma$  (متقابله)

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta \quad (ف)$$

پس  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$  (علوم متعارف ج)

ولی  $\alpha = \gamma$  (متقابله)

بنابراین  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$  (علوم متعارف ج)

ج - مثلث و زوایای آن

۹۴ - تعریف - قسمتی از سطح مستوی که از اطراف به قطعه مستقیم محدود باشد موسوم

است به مثلث (۵) سه قطعه مستقیم نزبور را سه ضلع مثلث و دو زاویه

بین آنها را سه رأس مثلث و سه زاویه که بین آنها در داخل مثلث واقعند

سه زاویه مثلث خوانند و معمولاً مثلث را به حرف که در سه رأس داشته باشد



تسین میکنیم

۹۵ - تعریف - زوایای مجانب هر یک از سه زاویه مثلث را زوایای خارج  
مثلث گویند

۹۶ - تعریف - هر زاویه خارج مثلث را با دو زاویه از مثلث که رأس مشترک دارند  
مقابل نامیم

۹۷ - فرع - مجاور هر یک از دو مثلث دو زاویه خارج متاومی واقع است

بشود که مثلث زاویه خارج مثلث به دو دسته منقسم شود یکی آنکه از استداد ضلع

در جهت حرکت عقربه های ساعت حاصل شود دیگر آنکه از استداد ضلع در خلاف جهت

سابق تولید میگردد و در هر دسته برای یک ضلع مثلث فقط یک زاویه خارج واقع است

۹۸ - پس مثلث سه زاویه خارج متمایز دارد و معمولاً مقصود از زوایای خارج مثلث این سه زاویه است

۹۸ - قضیه ۳ - مجموع سه زاویه خارج مثلث چهار قائمه است

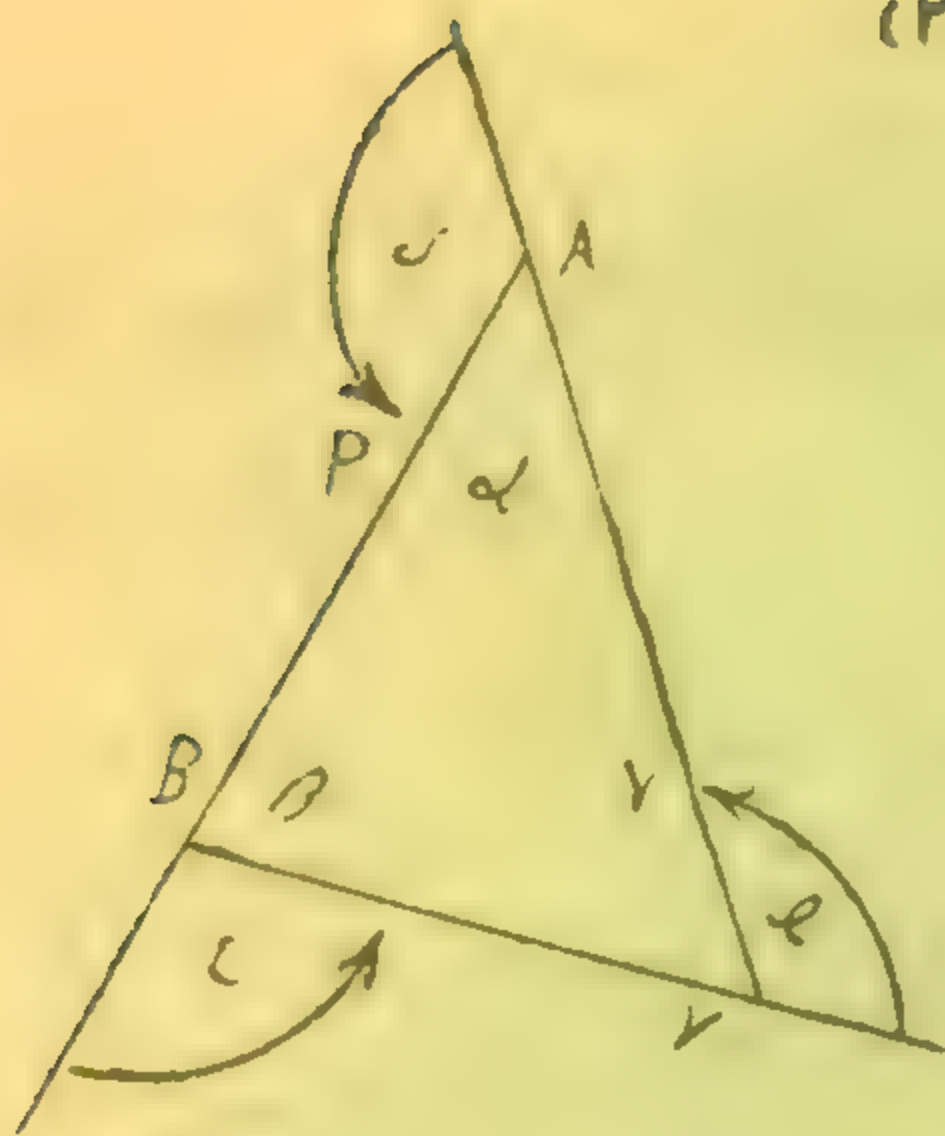
برهان - فرض میکنیم متحرکی بر محیط مثلث  $ABC$  از نقطه مانند  $P$  مفروضه

بر ضلع  $AB$  شروع بحرکت نموده بر رأس  $B$  آید و از آنجا بر رأس  $C$  و بعد بر رأس

$A$  رفته و بالاخره به نقطه  $P$  معاودت کند

فراوانی حفظ میشود که متحرک مزبور تا چهار بار است در سه نقطه  $B$  و  $C$  و  $A$  آمده است





حرکت خود را تغییر دهد از اینست که

در رأس B برای توجه بر رأس

C با اندازه زاویه غ ب چرخد

و گنگ در رأس C و A

با اندازه دو زاویه ص و سی دوران کند

اما بنا به استقامت صنغ در هیچیک از نقاط دیگر دورانی ندارد ولی چون  
همواره در یکجهت چرخیده غ ثابت بماند جهت اول توجه است معلوم می شود که  
در ضمن حرکت یکدوره یعنی ۳۶۰ درجه با چهار قائمه بدور خود دوران نمود و لهذا

$$۴ \text{ قائمه} = \sigma + \rho + \epsilon$$

۹۹- قضیه ۵- مجموع سه زاویه هر مثلث دو قائمه است

برهان - چون مجموع دو زاویه مجانبه دو قائمه است دیده میشود که در

$$\epsilon + \sigma = (\sigma + \rho) + (\rho + \epsilon) = \sigma + \rho + \sigma + \rho + \epsilon = ۴ \text{ قائمه}$$

اما به ق

$$\frac{\sigma + \epsilon + \rho = ۴}{\alpha + \beta + \gamma = ۲ = ۱۸۰}$$

پس معلوم می شود

۱۰۰- نتیجه - هرگاه دو زاویه مثلث معلوم باشد زاویه سوم نیز معلوم است  
 $\alpha = ۱۸۰ - (\beta + \gamma)$



۱۰۱- نتیجه - ۲- هرگاه درشتی یک زاویه قائمه باشد دوزاویه دیگر حاده و مجموع آنها یک قائمه است

۱۰۲- تعریف - هرشتی که یک زاویه شش قائمه باشد آن را قائمه الزاویه گوئیم و ضلع مقابل زاویه قائمه را وتر خوانیم

۱۰۳- نتیجه - ۳- اگر یک زاویه مثلث منفرجه باشد دوزاویه دیگر حاده مجموعشان منته حاده است

۱۰۴- تعریف - شتی که یک زاویه منفرجه داشته باشد سوم منفرجه الزاویه است

۱۰۵- نتیجه - ۳- هرگاه دوزاویه ازشتی با دوزاویه ازشت دیگر مساوی باشد

زاویه سوم مثلث اول با زاویه سوم مثلث دوم مساوی است

۱۰۶- نتیجه - ۵- هرزاویه خارج مثلث با مجموع دوزاویه مستابله خود مساوی است

$$\text{بنابر ق} \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\text{ولی} \quad \alpha + \gamma = 180^\circ \quad (\text{مجاوره})$$

$$\text{پس} \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad (\text{علوم متعارف})$$

۱۰۷- نتیجه - ۶- هرزاویه مثلث مساوی است با فضل زاویه خارج مثلث آن برزاویه مقابل دیگر



۱۰۸- نتیجه ۷- بر زاویه خارج مثلث از زاویه مقابل خود بزرگتر است  
 ۱۰۹- نتیجه ۸- چون بر زاویه خارج از نیم سطح کوچکتر است ممکن نیست در  
 دوزاویه قائمه یا دوزاویه منفرجه واقع شود

۱۱۰- نتیجه ۹- از نقطه واقع در خارج مستقیم مفروض میتوان یک عمود بر آن  
 فرد آورد نه بیش و الا لازم میآید که مثلث دارای دوزاویه قائمه وجود پیدا کند  
 ۱۱۱- نتیجه ۱۰- هرگاه بخواهند ثابت کنند که زاویه مفروضه بزرگتر از  
 زاویه صراحت میتوان این رسید را استعمال کرد که ثابت کنند هر یاسای  
 آن خارج مثلثی است و به مقابله آن است

### تمرینات

مسئله ۱- اگر  $\alpha = 47^\circ 25'$  و  $\beta = 28^\circ 13'$  و  $\gamma = 84^\circ$  باشد زوایای

۷ و ۶ و ۵ و ۴ هر کدام چه مقدارند

مسئله ۲- فرض میکنیم  $\alpha = 72^\circ 29' 4''$  و  $\beta = 118^\circ 4' 2''$  معلوم کنید

مقدار سایر زوایا را

مسئله ۳-  $\alpha = 104^\circ 24'$  و  $\beta = 12^\circ 19'$  و  $\gamma = 138^\circ$  معلوم کنید



که زاویه مثلث را



مسئله ۳ - در مثلثی که دو زاویه هر دو ۲۰ مساویند منفرض میکنیم اولاً  
 $\alpha = 40$  و ثانیاً  $\alpha = 70$  و در هر حالت سایر زوایا را

حساب کنید

مسئله ۵ - حکم - ثابت کنید که هرگاه در مثلثی دو زاویه مساوی باشند  
 منصف زاویه سوم بر ضلع مقابل عمود میشود

مسئله ۶ - حکم - ثابت کنید که هرگاه در مثلثی دو زاویه مساوی باشند  
 عمودی که از رأس سوم بر ضلع مقابل منفرود آید منصف آن زاویه است  
 مسئله ۷ - حکم - هرگاه نقطه در داخل مثلث فرض نموده آزاد بر رأس  
 وصل کنیم ثابت کنید که زاویه بین این دو خط از زاویه رأس سوم مثلث بزرگتر است

### د - زوایای کشیر الاضلاع

۱۱۲ - تعریف - قطعه از سطح مستوی را که به  $n$  خط مستقیم کاملاً محاط شده باشد

کشیر الاضلاع  $n$  ضلعی یا بالاختصار  $n$  ضلعی ( $n$  گوشه) نامند

تعاریف راجعه بر رأس و ضلع و زاویه و زاویه خارج عیناً همان است که

برای مثلث ذکر کردیم

۱۱۳ - تعریف - خطی که دو رأس غیر واقع بر یک ضلع را وصل میکند به قطر



کثیر الاضلاع موسوم است

- ۱۱۴ - فرع - از هر رأس کثیر الاضلاع  $n - 3$  - قطر ممکن است  
 ۱۱۵ - نتیجه - عدد اقطار کثیر الاضلاع  $n$  ضلعی از این دست  $n$  است

$$d = \frac{n(n-3)}{2} \quad (\text{بجای دلیل})$$

- ۱۱۶ - قضیه ۶ - مجموع زوایای کثیر الاضلاع  $n$  ضلعی  
 $(2n - 4)$  قائمه است

برهان - از نقطه مفروضه در داخل کثیر الاضلاع بر دو رأس آن وصل کنیم  
 تا کثیر الاضلاع  $n$  بر مثلث منقسم گردد مجموع زوایای این مثلثات  $2n$  قائمه بشود  
 اما مجموع زوایای کثیر الاضلاع با اندازه مجموع زوایای حول نقطه مفروضه که  
 رأس مشترک مثلثات است یعنی با اندازه چهار قائمه کمتر از مجموع زوایای  
 مثلثات میباشد پس مجموع زوایای کثیر الاضلاع چنین است

$$(2n - 2) \text{ قائمه} = (2n - 4) \text{ قائمه}$$

- ۱۱۷ - نتیجه - مجموع زوایای خارج کثیر الاضلاع با عدد اضلاع  $n$  یکی  
 گذشته همواره مساوی چهار قائمه است



## فصل سوم - تساوی و احکام مثلثات

۱- حالات تساوی و مثلث - برهان حالت اول و دوم

۱۱۸- تعریف - دو مثل را تساوی گوئیم وقتی که بتوان آنها را بر یکدیگر تطبیق

نمود که یکدیگر را کاملاً پوشانید و متحد و متبدل بشکل واحد گردند

۱۱۹- تعریف - در دو مثل تساوی اجزائی را که در حین انطباق بر یکدیگر تطبیق

می‌شوند اجزاء متناظره نامیم و بعبارة احسنی اجزاء دو مثل تساوی نظیر  
به نظیر متادی باشند

۱۲۰- فرج - در دو مثل تساوی اضلاع متادی است بلند بر و ایای متادی با <sup>لعل</sup>

۱۲۱- تشبیه - تساوی دو مثلث و سید اکثر الاستمالی است برای اثبات

تساوی دو قطعه خط یا دو زاویه زیرا اگر دو مثلث که دو قطعه خط یا دو زاویه مفروض

در آنها دو جنبه متناظر هستند متادی باشند تساوی دو قطعه یا دو زاویه مفروض

سبب این می‌شود

۱۲۲- مسئله - میخواهیم مثلثی تساوی با مثلث مفروض کنیم

حل - چون دو مثلث وقتی متاویزند که جمیع اجزائشان متادی باشند پس

مثلث مطلوب  $ABC = DEF$  باید با پنج شرط ذیل مطابقت کند



۱- باید زاویه  $D$  مساوی زاویه  $A$  باشد از این دو شرط نتیجه میشود

۲-  $\angle B = \angle E$  که  $F = C$  (قضیه)

۳- ضلع  $DE$  = ضلع  $AB$

۴-  $AC = DF$

۵-  $BC = EF$

ولی بجهت رسم شش  $DEF$  چهار طریقۀ بیشتر متصور نیست و هر طریقۀ دیگر تصور کنیم  
بسنی بر تبدیل رؤس و اضلاع برگزیده گیر و لذا اراجع بسبکی از این چهار  
طریقۀ دیگر کرد

طریقۀ اول -  $\angle D$  بوسیله نقاله زاویه  $A$  را مساوی با زاویه  $A$

(شرط ۱) رسم نموده ضلع  $BE$  را مساوی  $AB$  (شرط ۲) جدا کنیم

و بر نقطه  $E$  که نظیر  $B$  خواهد بود زاویه  $E$  را مساوی زاویه  $B$  (شرط ۲)

رسم میکنیم و چون دو ضلع غیر مشترک از دو زاویه  $D$  و  $E$  خود بر نقطه  $F$  تقاطع میکنند

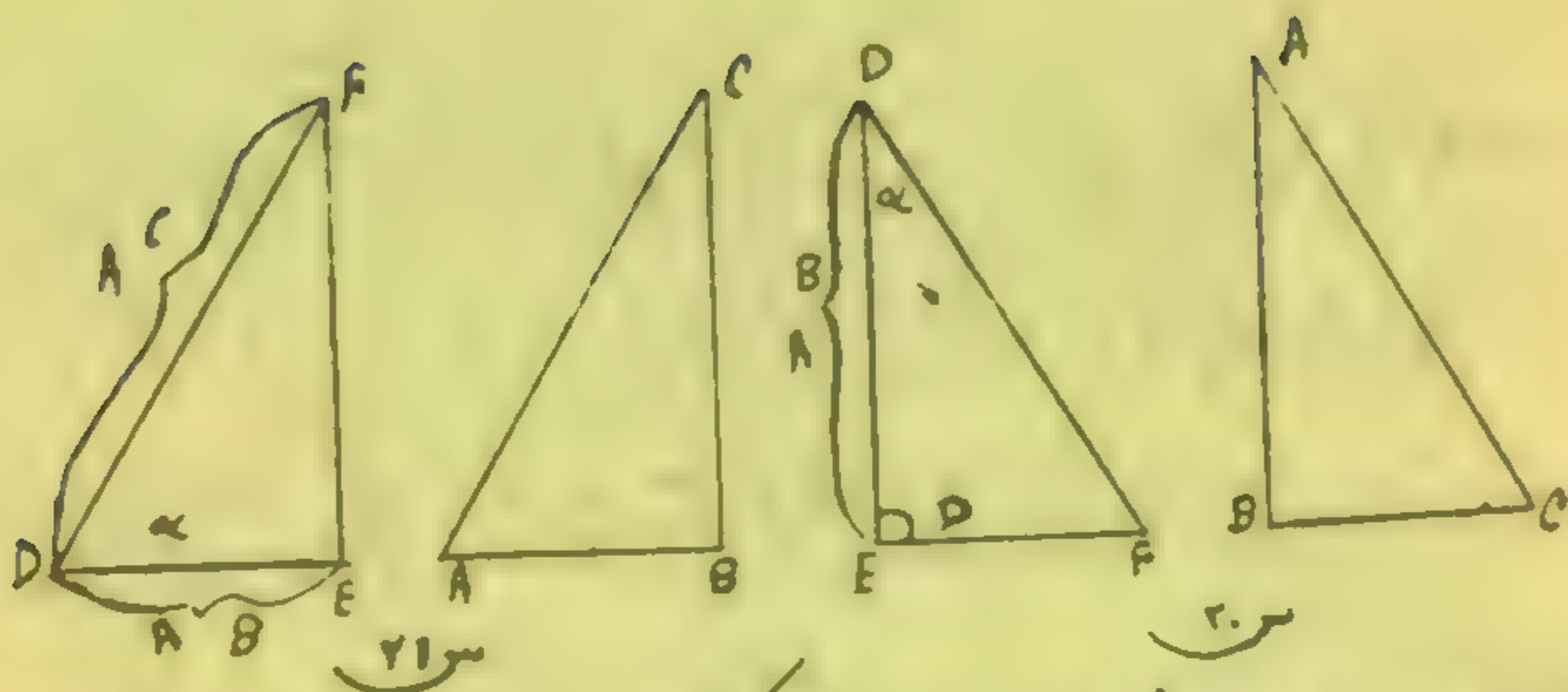
شش  $DEF$  کاملاً مشخص میشود

طریقۀ دوم -  $\angle D$  را بوسیله نقاله مساوی  $A$

برای استوار ساختن

(شرط ۱) رسم نموده دو ضلع  $DE$  و  $DF$  را بر نیب مساوی





با  $AC$  و  $AB$  (دو شرط ۲ و ۴) جدا کنیم و چون خط مستقیم مابین دو نقطه  
 $E$  و  $F$  منتهی بفرز است مثلث  $DEF$  کاملاً مشخص میگردد

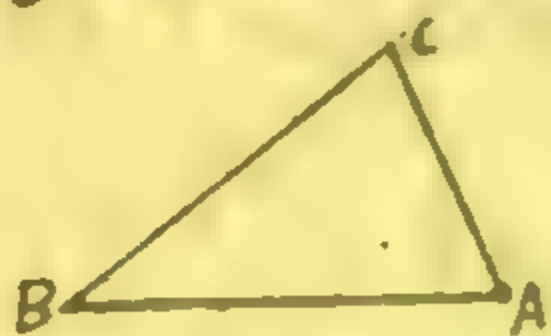
طریقه سوم - شرط بعرض اینکه  $CB > AC$  باشد زاویه  $D$  را

مساوی  $A$  (شرط ۱) و ضلع  $DF$  را مساوی  $AC$  (شرط ۴)

رسم نموده بر مرکز  $F$  و شعاع  $FE = BC$  (شرط ۵) قوس رسم میکنیم که با ضلع

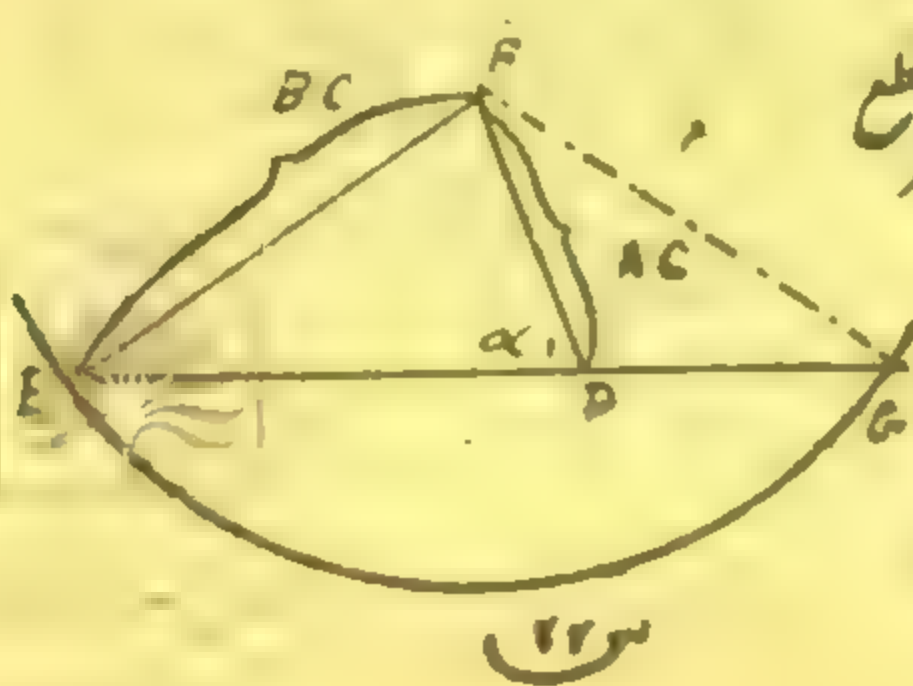
دیگر از زاویه  $D$  (مساوی  $A$ ) فقط یک نقطه  $E$  مشترک دارد بطوری که

زاویه  $E$  و مثلث  $DEF$  کاملاً مشخص میگردد



(دایره مرسوم بر مرکز  $F$  و شعاع  $FE = BC$ )

است داد  $DE$  را در نقطه دیگر  $G$  بر قطع



میکند و مثلثی تولید مینماید که زاویه  $F$  در آن مثل زاویه  $\alpha$  میباشد



طریقت چهارم - سطح  $DE$  را مساوی  $AB$  (شرط ۳)

رسم نموده از دو مرکز  $D$  و  $E$  با دو شعاع  $EF = BC$  و  $DF = AC$  (شرط ۴)

دو دایره رسم میکنیم که بر دو نقطه  $F$  و  $F'$  تقاطع میکنند

هر یک از دو مثلث  $DEF$  و  $DEF'$

میتوان جواب مسئله دانست چنانکه ملاحظه میشود

در هر یک از چهار طریقه فوق سه شرط از پنج

شرط بوسیله رسم اجرا میشود ولی هر دو

برهان واضح میگردد که دو شرط دیگر نیز بالتبع حاصل است و از اینجا چهار

قضیه ذیل در خصوص تساوی دو مثلث محقق میشود

۱۲۳ - قضیه ۷ - هرگاه در دو مثلث دو زاویه و ضلع مینمایان نظیر

تساوی باشند آن دو مثلث متساویند (حالت ز ض ز)

۱۲۴ - قضیه ۸ - هرگاه در دو مثلث دو ضلع و زاویه مینمایان نظیر نظیر

تساوی باشند آن دو مثلث متساویند (ض ض ز)

۱۲۵ - قضیه ۹ - هرگاه در دو مثلث دو ضلع و زاویه مقابل ضلع

اطول نظیر نظیر متساوی باشند آن دو مثلث متساویند (ض ض ز)



۱۲۶- قضیه ۱۰- هرگاه در دو مثلث به ضلع نظیر نظیر متساوی باشند  
آنگاه دو مثلث متساویند (تقن ض ض)

۱۲۷- برهان ۷- بوسیله انطباق

$$\hat{B} = \hat{E} \quad (۳) \quad \hat{A} = \hat{D} \quad (۲) \quad DE = AB \quad (۱) \quad (ف)$$

$$\Delta ABC = \Delta DEF \quad (ح)$$

(ب) - مثلث DEF را بر مثلث ABC چنان منطبق میکنیم که ضلع DE

بر مساوی خود AB و رأس D بر A منطبق شود چون بعرض  $DE = AB$

اولاً رأس E نیز بر رأس B منطبق میگردد و چون  $\hat{EDF} = \hat{BAC}$  ثانیاً ضلع

DF بر استداد AC قرار خواهد گرفت و نقطه F بر یکی از امتداد AC

و چون  $\hat{DEF} = \hat{ABC}$  ثانیاً ضلع EF بر BC واقع میشود نقطه F بر یکی

از نقاط BC پس نقطه F ناچار بر محل تلاقی AC و BC یعنی رأس C منطبق

میکردد و زیرا که نقطه نمیتواند در دو مکان افتد اگر دو بنا بر این مثلث

DEF یعنی مثلث ABC را پوشانند و با آن شته میشود و هوا المطلوب

۱۲۸- برهان ۸- بطریق انطباق

$$DF = AC \quad (۳) \quad D = A \quad (۲) \quad DE = AB \quad (۱) \quad (ف)$$



$$\triangle DEF = \triangle ABC \quad (\text{ح})$$

(ب) - مثلث  $DEF$  را بطریقی بر  $ABC$  منطبق میکنیم که  $DE$  بر  $AB$

و  $E$  بر  $B$  افتد چون  $ED = BA$  اولاً رأس  $D$  نیز بر رأس  $A$

واقع میشود و چون  $\widehat{EDF} = \widehat{BAC}$  ثانیاً ضلع  $DF$  بر  $AC$  منطبق

و چون  $DF = AC$  ثالثاً  $F$  بر رأس  $C$  و لذا  $EF$  بر  $BC$  منطبق شود

پس دو مثلث منطبق و مشتبه میشوند

۱۲۹ - قضیه - دو ضلع ۹ و ۱۰ را نمیتوان بودید انطباق ثابت کرد

و برای اثبات این دو قضیه قبلاً معرفت خواص مثلث متساوی الساقین لازم است

(برای بران این دو قضیه به نکته ۱۵۲ رجوع کنید)

ب - خواص مثلث متساوی الساقین

۱۳۰ - تعریف - هرگاه مثلثی را دو ضلع متساوی باشد مثلث متساوی الساقین

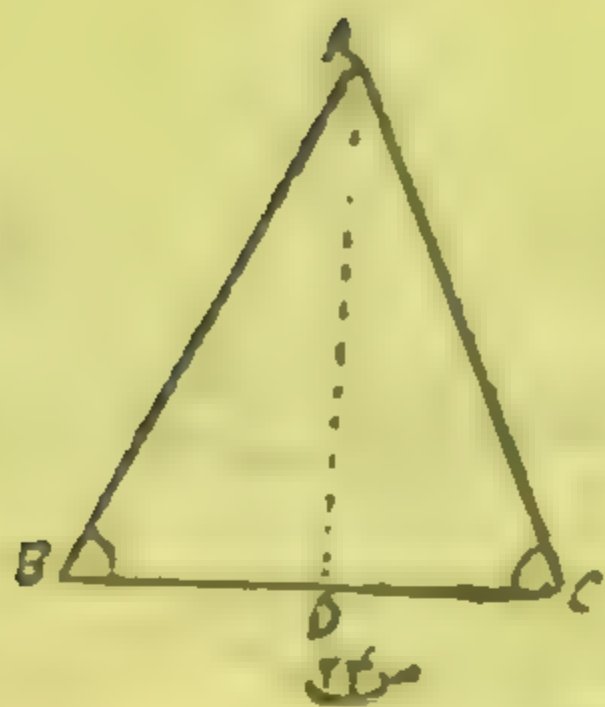
موسوم میشود و دو ضلع متساوی را دو ساق و ضلع سوم را بخصوص قاعده

در رأس مقابل را رأس گویند مثلثی که سه ضلعش متساوی باشند

متساوی الاضلاع نامند

۱۳۱ - قضیه ۱ - در مثلث متساوی الساقین دو زاویه طرفین قاعده منبسط





(ف)  $AB = AC$  (مساوی)

(ح)  $\hat{B} = \hat{C}$

(ب) - اگر زاویه  $BAC$  را نصف

$AD$  نصف کنیم  $\hat{BAD} = \hat{CAD}$  (بنا بر)

(بنا بر فرض)  $AB = AC$  و

(بدون تمسک)  $AD = AD$  و

(مضامین)  $\triangle ABC = \triangle ADC$  پس

و بنا بر این  $\hat{B} = \hat{C}$

۱۳۲- نتیجه ۱- زاویه خارجي مثلث متساوی الساقین مجاوره برأس

مضاعف هر یک از دو زاویه قاعده است

۱۳۳- نتیجه ۲- هر مثلث متساوی الاضلاع متساوی الزوا یا است و هر

زاویه آن  $60^\circ$  است (مث دو قاعده)

۱۳۴- قضیه ۱۲- هرگاه در مثلثی دو زاویه متساوی باشند

مثلث متساوی الساقین است

(دو ضلع مقابل به دو زاویه متساویه متساویند)



$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \quad \text{۱۳۴ (ف)}$$

$$AB = AC \quad \text{(ح)}$$

(ب) - اگر  $AD$  نصف زاویه  $BAC$  باشد

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} \quad \text{چون}$$

$$\widehat{B} = \widehat{C} \quad \text{و بالفرض}$$

$$\widehat{ADB} = \widehat{ADC} \quad \text{نتیجه می شود} \quad \text{(ق)}$$

$$AD = AD \quad \text{ولی}$$

$$\triangle BAD = \triangle CAD \quad \text{پس} \quad \text{(رض ز)}$$

$$AB = AC \quad \text{و بنا براین}$$

۱۳۵ - تعریف ۱ - وقتی فرض و حکم قضیه را یکدیگر تبدیل کنیم قضیه دیگر حاصل

می شود که آن را عکس قضیه اول گویند مثلاً ق ۱۳۴ عکس ق ۱۳۵ باشد

تعریف ۲ - وقتی فرض و حکم قضیه را نقی کنیم قضیه دیگر می نامیم به مخالف

قضیه اول حاصل می گردد

تعریف ۳ - اگر فرض (یا حکم) قضیه را نقی کنیم اما حکم (یا فرض) آن را

بجا ال اثبات گذاریم قضیه دیگر حاصل می شود که آن را نقیض قضیه اول

میگویم پس هر قضیه دارای یک قضیه عکس و یک قضیه مخالف و یک  
قضیه نقیض است

۱۳۶- فرع - عمودیکه از رأس مثلث مساوی الساقین بر قاعده منهدم  
قاعده و زاویه رأس را نصف میکند

۱۳۷- فرع - نصف زاویه رأس بر وسط قاعده عمود میشود

۱۳۸- فرع - خطی که اصل بین رأس و وسط قاعده زاویه رأس را نصف نموده  
بر قاعده عمود میشود

۱۳۹- فرع - عمودیکه بر وسط قاعده منهدم جاع شود بر رأس مرسومه زاویه  
رأس را نصف میکند (اثبات فروع بر معلوم است)

۱۴۰- قضیه ۱۳- خطی که اصل بین دو رأس دو مثلث  
مساوی الساقین که در قاعده مشترک باشند

(۱) با نظام ساقهای دو مثلث دو مثلث مساوی تشکیل میدهد

(ب) و زاویه رأس مثلثهای منهدم را نصف میکند

(ج) بر قاعده مشترک عمود میشود

(د) قاعده مشترک را نصف میکند



برهان - اگر دو مثلث راست  $ABC$  و  $BDC$  که در قاعده  $BC$   
 مشترکند منقضی کنیم بقضیه ۱۱

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$$

$$\widehat{DBC} = \widehat{DCB}$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACD} \text{ پس}$$

$$AB = DC \text{ ولی باین من}$$

$$DB = DC \text{ و}$$

$$\text{پس } \triangle ABD = \triangle ACD$$

$$\text{و } \angle ADB = \angle ADC \text{ (اتمام برهان بر عهد و تنعم است)}$$

۱۴۱ - باستعانت این قضیه مسائل اصلی ذیل را بدون احتیاج به مقیاس و تقاله یعنی

فقط به دو پرگار و ستاره و میسره حل نمود

مسئله ۱ - بخوابیم قطعه  $AB$  را نصف کنیم

حل - از دو مرکز  $C$  و  $B$  با دو شعاع متعادلی دو قوس رسم میکنیم بقضیه که

یکدیگر را تقاطع کنند و بهین طریق دو قوس دیگر رسم نموده دو نقطه تقاطع را



وصل میکنیم خط واصل  $CB$  را نصف میکند (بچه دلیل)

معمولاً سه چهار قوس را با یک شعاع رسم می‌کنند آنوقت دو نقطه تقاطع  
در دو سمت  $BC$  واقع می‌شوند

مسئله ۲ - میخواهیم زاویه مفروضه  $A$  را نصف کنیم

حل - از مرکز  $A$  با شعاع اختیاری دو قطعه متساوی از دو ضلع زاویه جدا  
نموده و از دو سمتهای  $B$  و  $C$  با دو شعاع متساوی دو قوس را یکدیگر را قطع  
کنند رسم میکنیم دو نقطه تقاطع دو قوس را بر پس زاویه وصل میکنیم خط واصل  
بنصف الزاویه است (بجو دلیل)

مسئله ۳ - میخواهیم از نقطه مفروضه  $C$  روی مستقیم  $AB$   
عمودی احداث کنیم

حل - از طرفین  $C$  با شعاع اختیاری دو طول متساوی  $CA$  و  
 $CB$  را جدا نموده و از دو مرکز  $A$  و  $B$  با دو شعاع متساوی دو قوس  
تقاطع رسم میکنیم و محل تقاطع را به  $C$  وصل میکنیم خط واصل عمود مطلوب  
است (بجو دلیل)

مسئله ۴ - میخواهیم از نقطه  $C$  مفروضه در خارج مستقیم  $AB$   
عمودی بر این خط هندود آوریم



حل - از مرکز  $C$  باشی استیاری قوسی چنان رسم میکنیم که خط مفروض را بر دو نقطه مانند  $A$  و  $B$  قطع کند از این دو مرکز با دو شعاع متساوی

دو قوس متقاطع رسم میکنیم و نقطه تقاطع را بنقطه  $C$  وصل میکنیم

ج - چند حکم که بخاطر مثلث متساوی الساقین اثبات میشود

۱۴۲ - قضیه ۱۴ - در هر مثلث ضلع اعظم مقابل است بزاویه اعظم

(ف)  $AB > AC$   $\widehat{B} > \widehat{C}$

(ح)  $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$

(ب) - ضلع  $AC$  را امتداد داده  $AD$  را مساوی با  $AB$  جدا

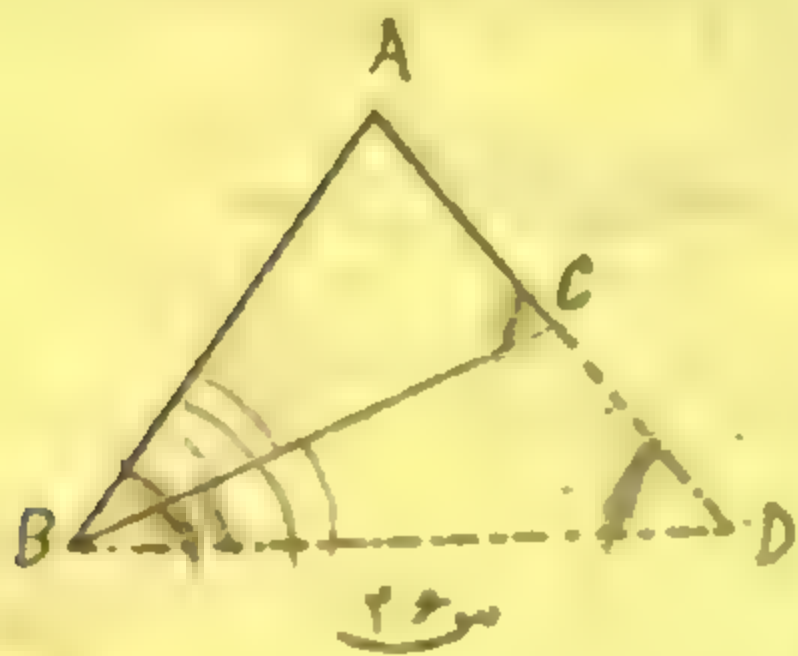
نموده  $BD$  را وصل میکنیم پس مثلث  $ABD$  متساوی الساقین است و

و  $\widehat{ACB}$  خارج مثلث  $BCD$

پس (۱)  $\widehat{ACB} > \widehat{ADB}$

ولی چون  $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$

پس  $\widehat{ACB} > \widehat{ABD}$



اما بالفرض  $AB > AC$  و  $AB = AD$  پس  $AD > AC$  و لذا  $BC$  خط

در درون زاویه  $ABD$  مابین  $AB$  و  $BD$  میافتد

$$\widehat{ABD} > \widehat{ABC} \quad \text{بنابر این}$$

حال بعد از جمع (۲) و (۳) و استنتاج  $\widehat{ABD}$  از طرفین

$$\widehat{ACD} > \widehat{ABC} \quad \text{نتیجه میشود}$$

و هو المطلوب

۱۴۳- قضیه ۱۵- در هر مثلث ضلع مقابل بزاویه اعظم الحوت  
از ضلع مقابل بزاویه کوچکتر (عکس قضیه)

$$\widehat{ACB} > \widehat{ABC} \quad \text{(ف) معروضه}$$

$$AB > AC \quad \text{(ح) معروضه}$$

(ب) - (دلتا) اگر  $AB = AC$  فرض شود به "باید"  $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$

باشد و اگر  $AB < AC$  فرض شود به "باید"  $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$  باشد

و این هر دو خلاف فرض است پس  $AB < AC$  و هو المطلوب

۱۴۴- تنبیه - اغلب به استقامت این دو قضیه عدم تساوی دو ضلع یا دو

زاویه را ثابت میکنند باین طریق که دو ضلع یا دو زاویه معترضه را جزو مثلثی

سپارند و یکی از دو قضیه را بکار میبرند

۱۴۵- نتیجه ۱- همیشه کوچکترین ضلع مثلث مقابل بزاویه کوچک است

۱۴۶- نتیجه ۲- زاویه مجاوره بضلع اعظم مثلث بر سواره حاده است



۱۴۷- نتیجه ۳- در مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل زاویه قائمه بزرگترین و وتر بزرگترین ضلع است  
 ۱۴۸- نتیجه ۴- عمودیکه از نقطه خارج خط بر آن میسرود آید قصر خطی است که از آن <sup>نقطه</sup> <sub>بزرگترین</sub>

بدین خواص می شود بدین مناسبت فاصله نقطه را از خط بواسطه طول عمود بیان میکنند  
 ۱۴۹- قضیه ۱۶- در هر مثلث هر ضلع اقصر است از مجموع دو ضلع دیگر

(ب) است ضلع  $AB$  را با اندازه  $BC$  امتداد داد و  $DC$  را وصل

میکنیم پس  $AD = AB + BC$

ولی چون  $BD = BC$  به ق  $\widehat{BDC} = \widehat{BCD}$

اما  $\widehat{ACD} > \widehat{BDC}$  (خرو دل)

پس  $\widehat{ACD} > \widehat{BDC}$

و بقضیه ۱۵  $AD > AC$

یعنی  $AC < AB + BC$

۱۵۰- نتیجه ۱- خط مستقیم اقصر فاصله بین دو نقطه است

۱۵۱- نتیجه ۲- در هر مثلث هر ضلع اطول است از تفاضل دو ضلع دیگر

(برای توضیح این نتیجه کافی است از طرفین حکم قضیه  $BC$  را اشتقاق کنیم

و حاصل می شود  $AC - BC < AB$

# تمرینات

- مسئله ۱- زاویه قائمه رسم کنید مسئله ۲- زاویه مساوی ۴۵ درجه رسم کنید
- مسئله ۳- زاویه مساوی ۲۲.۵ درجه رسم کنید مسئله ۴- زاویه ۶۷.۵ درجه رسم کنید
- مسئله ۵- زاویه ۶۰ درجه رسم کنید مسئله ۶- زاویه ۳۰ درجه رسم کنید
- مسئله ۷- زاویه ۱۵ درجه رسم کنید مسئله ۸- زاویه ۱۰.۵ درجه رسم کنید
- مسئله ۹- زاویه ۵۲.۵ درجه رسم کنید مسئله ۱۰- زاویه ۱۳.۵ درجه رسم کنید
- مسئله ۱۱- میخوام به شما شش زاویه را بگویم که رسم کنید که قاعده آن  $a$  باشد
- زاویه رأس آن (مقابل قاعده)  $۷۵$  باشد
- مسئله ۱۲- به شما شش زاویه را بگویم که رسم کنید (زاویه  $a$  و  $b$  دو ضلع زاویه قائمه و  $c$  وتر است)

$$۱- a = ۶۰^\circ \text{ و } b = ۵۰^\circ \quad ۲- a = ۶۰^\circ \text{ و } c = ۱۰^\circ$$

$$۳- a = ۶۰^\circ \text{ و } \alpha = ۲۰^\circ \quad ۴- a = ۶۰^\circ \text{ و } B = ۶۷.۵^\circ$$

$$۵- c = ۱۲^\circ \text{ و } \alpha = ۲۲.۵^\circ \quad ۶- c = ۱۰^\circ \text{ و } a = ۶۰^\circ$$

- مسئله ۱۳- میخوام به شما شش زاویه را بگویم که رسم کنید (چهار ضلع منصف الزاویه  $b$  است)



$$۱ - a = ۸ \quad b = ۹ \quad r = ۵۲,۵$$

$$۲ - a = ۱۰ \quad b = ۱۲ \quad r = ۱۰,۵$$

$$۳ - a = ۹ \quad b = ۷,۵ \quad r = ۵۲,۵$$

$$۴ - a = ۷ \quad b = ۶۷,۵ \quad r = ۷,۵$$

$$۵ - a = ۷ \quad b = ۷,۵ \quad r = ۵$$

$$۶ - a = ۹ \quad b = ۷,۵ \quad r = ۶۷,۵$$

د - برهان حالت سوم چهارم از تساوی مثلثات

۱۵۲ - برهان قضیه ۹ (ف) برهان دوم

$$\widehat{ABC} = \widehat{DEF} \quad , \quad BC = EF \quad , \quad AC = DF \quad ,$$

$$\Delta ABC = DEF \quad - (ح)$$

(ب) - مثلث DEF را مجاور مثلث ABC بطریق متساوی کنیم که

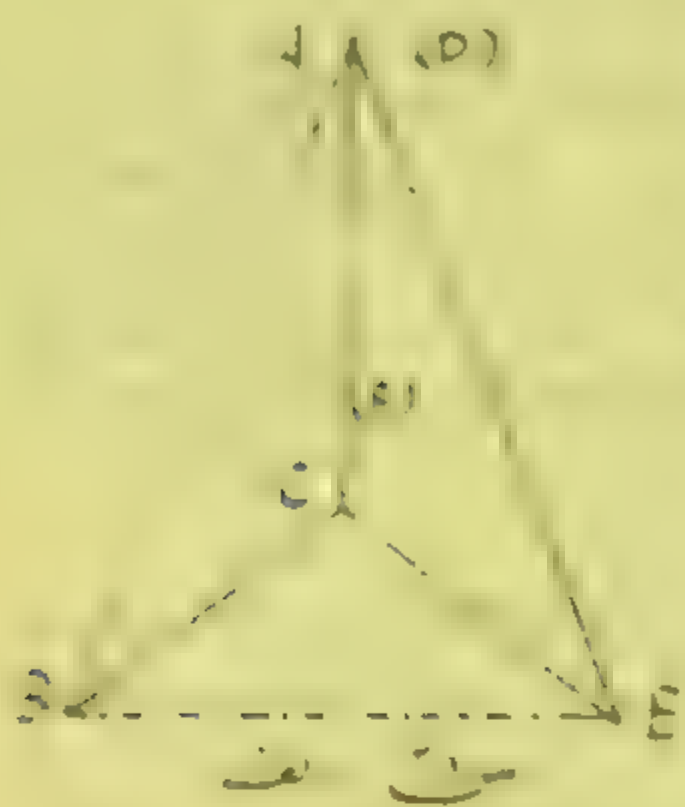
منبع DF بر مساوی خود AC منطبق شود و مثلث در طرفین آن واقع شوند

و نقطه B را نقطه E وصل کنیم حال چون دو زاویه BAC و

EDF هادو اند (قضیه ۱ و ۲) زاویه BAE کوچکتر از نیم

سطح (دو فاند) است و لذا خط BE منبع AC یا امتداد آن را قطع میکند

و چون با فرض  $BC = EF$  زاویه  $CBE$  مساوی زاویه  $CEB$



خواهد بود ولی بالعکس  $\angle ABC = \angle AEC$   
 یعنی  $\angle ABC + \angle CBE = \angle AEC + \angle CEB$   
 و لهذا  $\angle ABC - \angle CBE = \angle AEC - \angle CEB$

یعنی  $\angle ABE = \angle AEB$

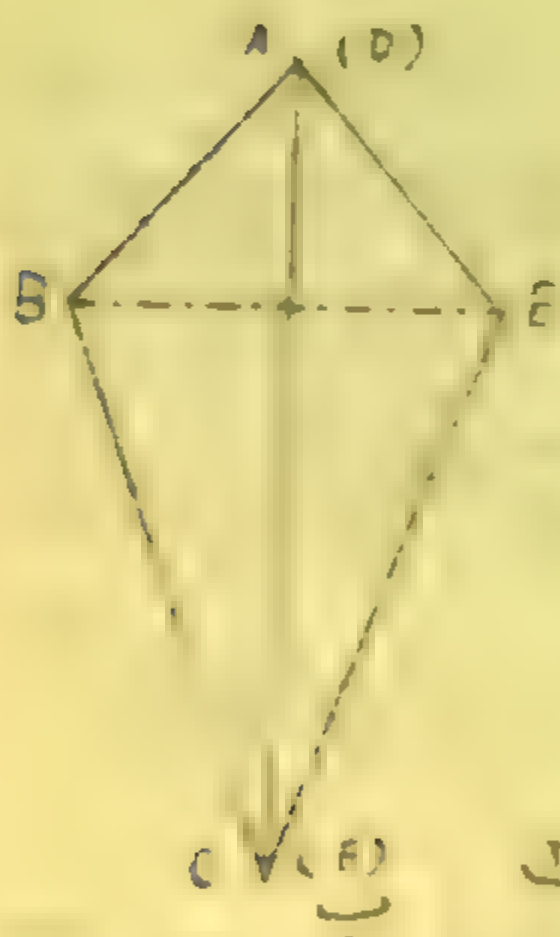
پس  $AB = AE$  ق ۱۲

حال چون دانستیم که دو مثلث متساوی الساقین

بر قاعده مشترک  $BE$  واقع شده اند

بقضیه ۱۳ معلوم میشود که

$\triangle ABC = \triangle AEC$  و بر ما مطلوب



هرگاه خط  $BE$  بر نقطه  $C$  بگذرد بر این

خیلی ساده میشود و بر منتهی است که در این صورت بر این اقدام کند و قضیه محتاج الیه را  
 تشخیص دهد و قضیه را به بیان شبیه سازی دو مثلث قائم الزاویه ادا کند

۱۵۳ - برهان قضیه ۱۰ - ف -  $AB = DE$  و  $AC = DF$  و  $BC = EF$

(ح)  $\triangle ABC = \triangle DEF$  مود ۲۸

ب - دو مثلث را طریق فوق متساوی الساقین  $BE$  را وصل کنیم آنوقت



و مثلث مساوی الساقین  $A B E$  و  $E C B$  بر تانده مثلث  $A E C$

واقع شده دو مثلث مفروض قضیه ۱۳ متساوی می‌شوند

از قضیه ۱۰ حل مسئله اصلی ذیل استنباط می‌شود

۱۵۲- مسئله اصلی - بخوانیم بر نقطه  $A$  از مستقیم  $A B$  زاویه

مساوی زاویه  $\alpha$  رسم کنیم

حل - نقطه  $A$  را مرکز نمود و با شعاعی اختیار می‌دهیم دو جزو مساوی  $A C$  و

$A B$  را از دو ضلع زاویه  $\alpha$  جدا کنیم و از نقطه  $A$  با همین شعاعی قوسی رسم

می‌کنیم که خط  $A B$  را بر نقطه  $B$  قطع می‌کند از این نقطه با شعاع  $A C$  قوسی دیگر

رسم می‌کنیم تا دایره برسود و بر نقطه



مانند  $C$  قطع نماید چون  $C$  را بر  $A$

و من کنیم سه ضلع شود زیرا جهت

$$\triangle A B C = A' B' C'$$

۵- موارد استعمال تساوی مثلثات

۱۵۵- تعریف - هرگاه خطی بر دو خط مستقیم عمود شود آنرا عمود منصف

اصطلاح میکنیم

۱۵۶- قضیه ۱۷- هر نقطه از عمود منصف قطعه مفروض تساوی الفاصله است از طرفین آن نقطه

(برای این قضیه بحالت فرض از تساوی مثلثات راجع است زیرا چون نقطه مفروضه را بطرف

قطعه وصل کنیم دو مثلث حاصل میشود که تساوی آنها بحالت مزبور محقق میگردد)

۱۵۷- قضیه ۱۸- هر نقطه که از طرفین قطعه مستقیم یک فاصله باشد

بر عمود منصف آن واقع است (عکس قضیه ۱۷)

(برای این راجع است بحالت من من من)

۱۵۸- از ترکیب دو حکم ۱۷ و ۱۸ چنین نتیجه میشود

مکان هندسی ۲- عمود منصف هر قطعه مستقیم مکان هندسی تقاطعی است

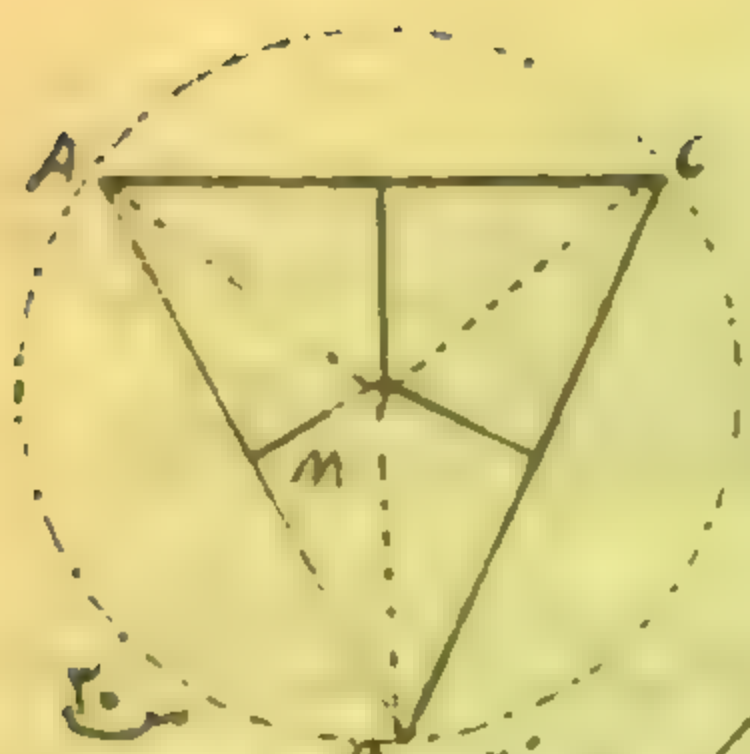
که از طرفین آن قطعه یک فاصله باشد

۱۵۹- قضیه ۱۹- سه عمود منصف ضلع مثلث بر یک نقطه تقاطع میکنند

(مستقاربند) که از سه رأس مثلث یک فاصله است

برای این - فرض میکنیم نقطه  $M$  محل تلاقی دو عمود منصف دو ضلع  $AB$  و $BC$  از مثلث  $ABC$  باشد مثلثقضیه ۱۷  $MB = MA$





$$MB = MC$$

$$MC = MA \text{ پس}$$

و قضیه ۸ نقطه M بر محور منصف ضلع AC واقع می‌شود

۱۰۰- نتیجه - نقطه M مرکز دایره است که بر سه نقطه A و B و C

و C مرور کند پس معلوم می‌شود که :

دایره ماره بر سه نقطه غیر واقع بر یک استقامت منحصر بفرد و کاملاً مشخص است

۱۶۱- تعریف - فاصله یا بُعد نقطه مفروضه از خط مفروض عبارت از طول

عمودیت که از آن نقطه بر این خط منتهی شود آید

۱۶۲- قضیه ۲۰- هر نقطه منصف الزاویه متساوی السعید است از دو ضلع زاویه

(از دو کلمه (منصف الزاویه) و (بُعد) که مفروض قضیه را بیان میکند و سید اثبات

متساوی دو مثلث بدست می‌آید)

۱۶۳- قضیه ۲۱- هر نقطه که از دو ضلع زاویه متساوی السعید باشد

بر منصف الزاویه واقع است (عکس قضیه ۲۰)

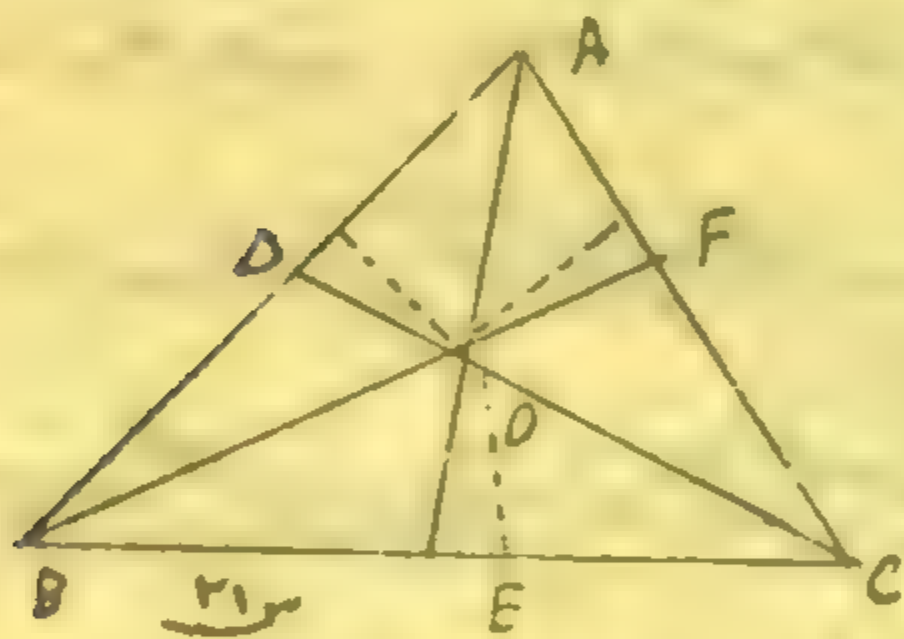
(چون نقطه مفروضه را بر عکس زاویه وصل کنیم دو مثلث قائم الزاویه متساوی حاصل می‌شود)

۱۶۴- از ترکیب دو قضیه ۲۰ و ۲۱ چنین نتیجه می‌شود

مکان هندسی ۳ - منصف الزاویه مکان هندسی تقاطعی است  
که از دو ضلع زاویه بیک فاصله باشند

۱۶۵ - قضیه ۲۲ - سه منصف الزاویه بر مثلث بر یک نقطه که از سه  
ضلع مساوی البعد است تلاقی کنند

برهان - فرض کنیم نقطه  $D$  محل تلاقی دو منصف دو زاویه  $A$  و  $B$  از مثلث  
 $ABC$  باشد  $DD$  و  $OE$  و  $OF$  فاصل این نقطه از سه ضلع مثلث است



بقضیه ۲۰  $OD = OF$

$$\underline{OD = OE},$$

پس  $OE = OF$

ولذا بقضیه ۲۱ نقطه  $O$  بر منصف الزاویه  $C$  واقع است

۱۶۶ - فرع - همین طریق مبرهن میشود که هر منصف الزاویه داخلی با دو منصف زاویه خارجی

مثلث که رأس مشترک ندارند بر یک نقطه تلاقی میکنند که از اضلاع مثلث بیک فاصله است

۱۶۷ - نتیجه - وقتی سه خط دو به دو تقاطع کنند (مثلث تولید نمایند) همواره میتوان

چهار نقطه یافت نه بیش که هر کدام از سه خط مفروض بیک فاصله باشند

۱۶۸ - تعریف - عمودیکه از رأس مثلث بر ضلع مقابل منهدم آید به ارتفاع





رسم کنیم

- مسئله ۴ - مثلثی از  $a$  و  $b$  و  $c$  رسم کنید بفرقی باشد  $a > b$
- مسئله ۵ - مثلثی از  $a$  و  $b$  و  $c$  رسم کنید بفرقی باشد  $a < b$  (دو جواب یک جواب)
- مسئله ۶ - مثلثی متساوی الساقین از قاعده و ارتفاع متعلق بدان رسم کنید
- مسئله ۷ - مثلثی متساوی الساقین از قاعده و ارتفاع وارد بر یک ساق رسم کنید
- مسئله ۸ - مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید (محرر و محقق) علامت زاویه است

کدام دو خط  $q$  تولید شده

$$1 - a = 10, b = 7, m_a = 6$$

$$2 - a = 1, b = 5, m_a = 4.5$$

$$3 - a = 1, b = 1, m_a = 6, m_a = 4.5$$

$$4 - a = 6, b = 7.5, m_a = 8$$

$$5 - a = 7, m_a = 5, b = 6.75$$

مسئله ۹ - مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید (مستقیم الزاویه و ضلع  $a$ )

به نقطه سمت میکنند آنرا که مجاور رأس  $B$  است و آنرا که مجاور رأس  $C$  است

علامت زاویه رسم



$$s_b = 4 \quad b = 5 \quad v_a = 7 \quad -1$$

$$s = 15 \quad s_b = 2 \quad v_a = 5 \quad -2$$

$$B = 10.5 \quad s_c = 5 \quad v_a = 9 \quad -3$$

$$a = 6.0 \quad b = 1 \quad s_b = 10 \quad -4$$

$$a = 11.0 \quad s_b = 1 \quad v_a = 1 \quad -5$$

مسئله ۱۰ - مثلی از معوات ذیل را رسم کنید (در حجم ضلع ۱۲ را به دست می‌کنید)  
که آن را مجاور رئوس C است با هر دو آن که مجاور رئوس B است به علامت می‌گذرانیم

$$C = 11 \quad p_b = 7 \quad b = 9 \quad -1$$

$$h_a = 7 \quad C = 9 \quad b = 1 \quad -2$$

$$a = 15 \quad h_a = 5 \quad b = 6 \quad -3$$

$$B = 5.5 \quad p_c = 4 \quad p_b = 3 \quad -4$$

$$Y = 5.5 \quad p_b = 5 \quad a = 11 \quad -5$$

$$Y = 15 \quad B = 4.5 \quad p_b = 3 \quad -6$$

$$B = 6.5 \quad a = 5.5 \quad p_b = 7 \quad -7$$

$$m_a = 1 \quad b = 7 \quad p_b = 5 \quad -8$$

$$۹ - \quad \angle C = 75^\circ \quad \angle B = 13^\circ \quad \angle A = 92^\circ$$

مسئله ۱۱ - مثلثی از معلومات ذیل رسم کن

$$۱ - \quad a = 12 \quad b + c = 11 \quad \alpha = 75^\circ$$

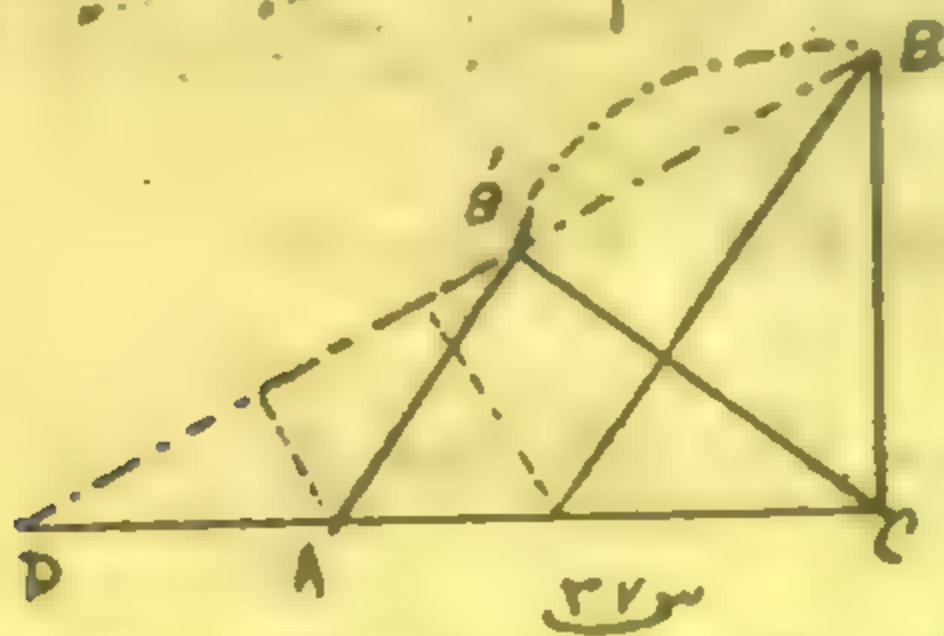
حل - چون در مثلث  $ABC$   $\angle C = 75^\circ$  کیت  $b + c$  یعنی  $AC + AB$

که  $CD$  باشد تشکیل نموده نقطه  $D$  را به  $B$  وصل نمایم و بدیهه میشود که مثلث  $ADB$

مساوی الساقین است و بنابراین  $\angle B = \angle D$  (نتیجه ۱) بطوری که از مثلث

$DBC$  دو ضلع و زاویه مقابل یکی از آن دو معلوم است و از اینجا طریق رسم

ذیل حاصل میشود



رسم - خط  $CD$  را مساوی

$b + c$  رسم نموده بر نقطه  $D$  زاویه

مساوی  $\angle C$  میسازیم و از مرکز  $C$  با شعاع  $\alpha$  قوسی می‌کشیم و به  $DB$  را

قطع نموده نقطه  $B$  را تعیین میکنیم و چون بر وسط  $DB$  عمودی می‌کشیم (یا

روی  $DB$  را بر نقطه  $B$  زاویه مساوی  $\angle C$  میسازیم) رأس سوم

$A$  از مثلث مجهول پیدا میشود و از وصل  $AB$  (با  $A'B'$ ) مثلث مطلوب حاصل میگردد

$$۲ - \quad a = 6 \quad b + c = 9 \quad \alpha = 105^\circ$$



$$\beta = ۱۰۵ \quad b + a = ۱۱ \quad a = ۵ \quad -۳$$

$$\beta = ۶۷,۵ \quad \alpha = ۴۵ \quad b + c = ۱۲ \quad -۴$$

$$\gamma = ۷۵ \quad \beta = ۵۲,۵ \quad b + c = ۱۵ \quad -۵$$

$$\gamma = ۱۵ \quad \alpha = ۶۰ \quad b + c = ۱۰ \quad -۶$$

مسئله ۱۲ - شش از معلومات ذیل رسم کنید

$$\alpha = ۵۲,۵ \quad b - c = ۳ \quad a = ۲$$

حل - چون مانند مسأله ۱۱ است لکن معلوم شود

که از شش DBC سمت ۳ دو ضلع و زاویه مقابل بسنجیم معلوم است در این C

از شش مطلوب بر نقطه تلاقی عمود منصف BD

و امتداد DC واقع است

$$\gamma = ۶۷,۵ \quad b - c = ۳ \quad a = ۱ \quad -۲$$

$$\beta = ۷۵ \quad \alpha = ۶۷,۵ \quad b - c = ۵ \quad -۳$$

$$\gamma = ۷۵ \quad \beta = ۵۲,۵ \quad b - c = ۴ \quad -۴$$

$$\beta - \gamma = ۷,۵ \quad \alpha = ۵۲,۵ \quad b - c = ۳ \quad -۵$$

مسئله ۱۳ - شش از معلومات ذیل رسم کنید

$$۱ - a + b + c = ۱۵ \quad \alpha = ۴۵^\circ \quad \beta = ۶۷,۵^\circ$$

حل - چون در مثلث  $ABC$  مجموع زاویه‌ها  $۱۸۰^\circ$  است و مجموع زاویه‌ها را با این طریق تشکیل کنیم که  $BC$  را از طرف راست با اندازه  $AC$  و از طرف چپ با اندازه  $AB$  امتداد دهیم آنوقت دو نقطه  $D$  و  $E$  را به  $A$  وصل کنیم دیده میشود که چون

$$BD = BA \quad \text{پس} \quad \angle ADB = \frac{\beta}{۲} \quad \text{و چون} \quad CA = CE$$

$$\text{پس} \quad \angle AEC = \frac{\alpha}{۲} \quad \text{و بنابراین از مثلث} \quad AED \quad \text{دو زاویه در ضلع بینهما معلوم}$$

دورانس  $B$  و  $C$  از مثلث مطلوب دو نقطه تلاقی  $ED$  با دو عضو

نصف  $AD$  و  $AE$  خواهد بود

$$۲ - a + b + c = ۱۲ \quad \alpha = ۴۵^\circ \quad \beta - \gamma = ۲۲,۵^\circ$$

$$۳ - a + b + c = ۱۸ \quad \gamma = ۷۵^\circ \quad \alpha - \beta = ۱۵^\circ$$

و بعضی احکام مثلث که از تساوی مثلثات استنباط میشود

۱۷۰ - قضیه ۲۳ - هرگاه در دو مثلث دو ضلع نظیر نظیر متناهی

لیکن زاویه بینهما متناهی نباشند ضلع مقابل بزاویه اعظم اطول خواهد بود از ضلعی که مقابل است بزاویه کوچکتر

$$\text{ف - سه} \quad \angle D > \angle A \quad \text{و} \quad DF = AC \quad \text{و} \quad DE = AB$$

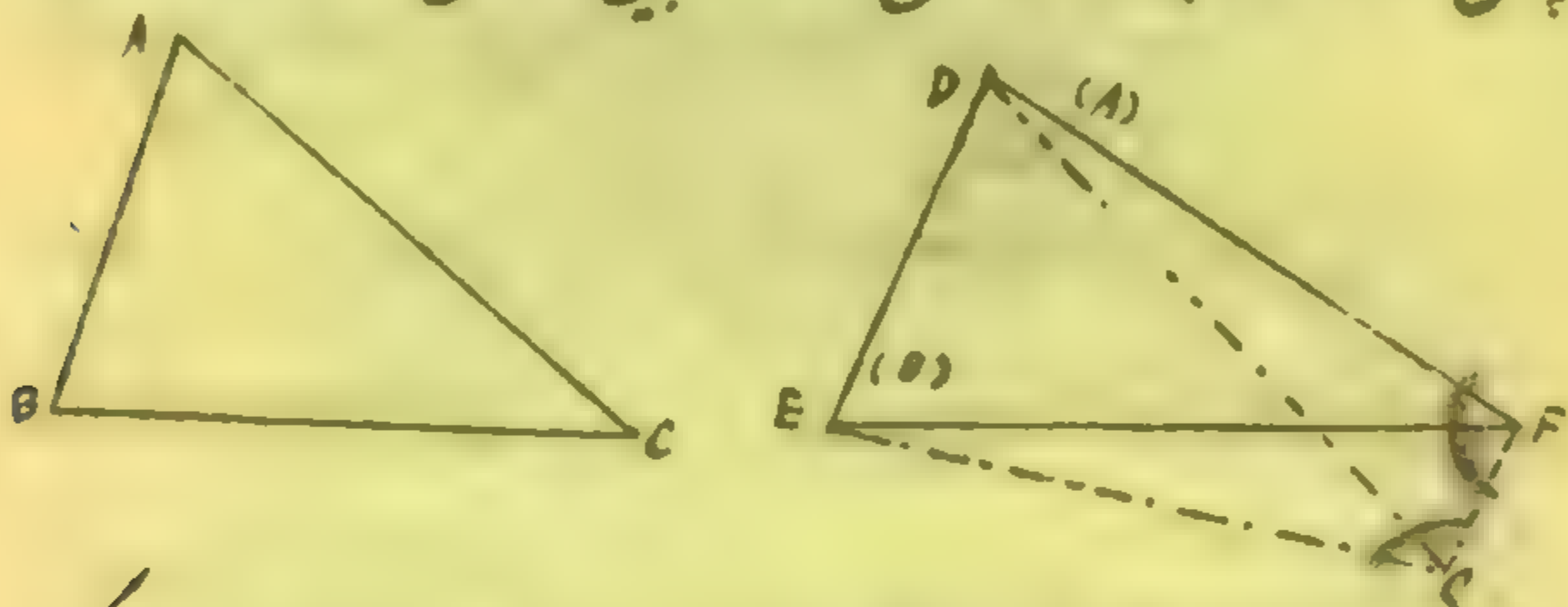


$$EF > BC \quad \text{ح -}$$

ب - بفرمزانکه  $AC > AB$  باشد مثلث  $ABC$  را بر مثلث  $DEF$

چنان منطبق میکنیم که  $AB$  بر مساوی خود  $DF$  واقع شود

چون  $\angle BAC < \angle EDF$  ضلع  $AC$  مابین دو ضلع زاویه  $EDF$  میافتد



و زاویه  $ECF$  را که از وصل نقطه  $C$  به  $F$  حاصل شده بدو قسمت میکند

$$\angle ECF > \angle DCF \quad \text{پس}$$

لیکن چون مثلث  $DCF$  مساوی التاقین است  $\angle DCF > \angle EFC$

$$\angle DCF > \angle EFC \quad \text{پس} \quad \angle DFC > \angle EFC$$

$$\angle ECF > \angle EFC \quad \text{و بطریق اولی}$$

ولذا بقضیه ۱۴  $EF > FC$  یا  $EF > BC$  و این مطلوب

۱۷۱ - تنبیه - اگر  $AC < AB$  باشد  $AC$  را بر  $DF$  منطبق میکنیم

و بر مستقیم است که علت این ضرورت را بگوید

۱۷۲ - قضیه ۲۲ - هرگاه در دو مثلث دو ضلع نظیر نظیر مساوی  
اما ضلع سوم مختلف باشند زاویه مقابل بصلع اطول اعظم است (قضیه ۲۳)  
طریقه برهان - قضیه برهان خلف ثابت میشود و قضیه ۲۳ باقی از حالات  
تساوی مثلثات (ص ز ص) طرف احتیاج است

## مقرینات

مطلوبت برهان احکام ذیل

۱ - در دو مثلث قائم الزاویه که وترشان مساوی باشند هر یک از دو ضلع دیگر نظیر  
نظیر آنکه بر زاویه عاده اعظم مقابل است اعظم است

طریقه برهان - اگر دو مثلث را چنان بر یکدیگر منطبق کنیم که دو وتر منطبق شده زاویه  
کوچتر قسمتی از زاویه بزرگتر را پوشاند بلاخطه زاویه قائمه مغربه بودن یک زاویه محقق میشود  
۲ - در دو مثلث قائم الزاویه مساوی کوچکترین هر یک از دو ضلع اعظم نظیر نظیر مقابل  
بر زاویه عاده اعظم (برهان خلف)

۳ - دو مثلث قائم الزاویه که یک ضلع زاویه قائمه در آنها مساوی باشد وتر مثلثی که این  
ضلع در آن مثلث بر زاویه اعظم مجاور است اطول خواهد بود

۴ - از دو مثلث مساوی التاقین مساوی است عاده آنکه زاویه رأس کوچکتر است



باقش اول است

۵- از دو مثلث متساوی الساقین متساوی الساق آنکه زاویه رأسش اعظم است قاعدش

اول است

فصل چهارم - اقسام ذوات ربعة ضلعا

۲- احکام خطوط متوازی

۱۷۳- تعریف - وقتی دو خط را خط ثالثی قطع کند هشت زاویه تولید شود



از این هشت زاویه چهار زاویه ۱ و ۲ و ۳ و ۴

و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ که با یکدیگر دو خط متوازی

افتاده اند و این چهار زاویه

دو برابر است (۱ و ۳ و ۲ و ۴) که گویند

۱۷۴- تعریف - هر دو زاویه را که در یک طرف قاطع بوده و رأس مشترک

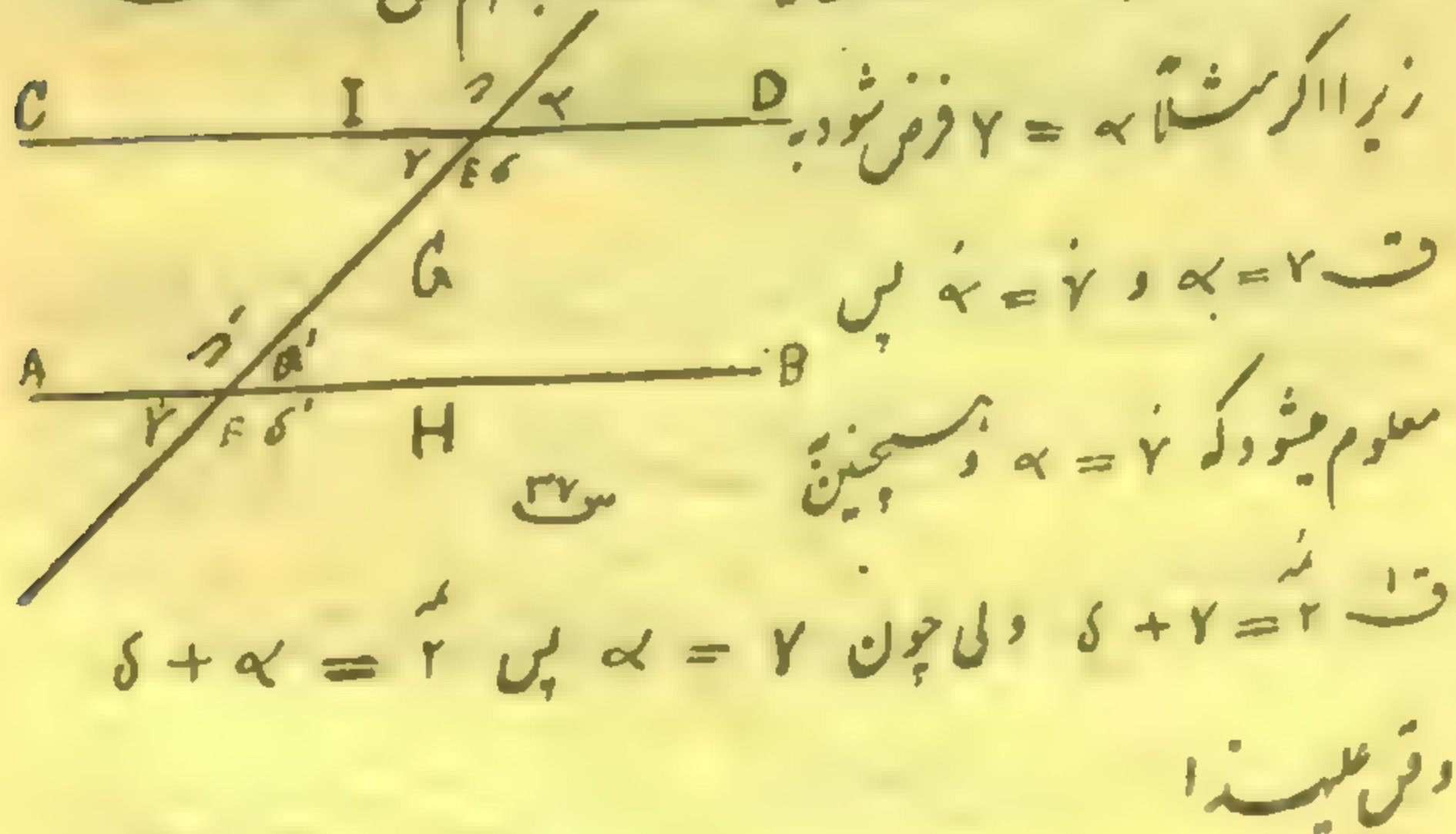
نداشته باشند متقابل گوئیم پس زاویه متقابل برهمنند اول متقابل

داخله (۱ و ۲ یا ۳ و ۴) و دوم متقابل خارج (۵ و ۶ یا ۷ و ۸)

سوم متقابل داخل و خارج (۱ و ۲ و ۳ و ۴ یا ۵ و ۶ و ۷ و ۸)

۱۷۹- تعریف - هر دو زاویه که در دو سمت مختلف قاطع افتاده و در یک  
 مشترک باشند نسبت یکدیگر مستبادله نامیده میشوند. پس زوایای  
 متبادله نیز بر سه قسمند اول مستبادله داخل (۲ و ۵ و ۳ و ۴)  
 دوم مستبادله خارج (۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸)  
 (۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲)

۱۷۶- فرج - هرگاه دو زاویه مستبادله هم نوع یا دو سمت باشد مختلف النوع  
 متادیه باشند اولاً هر دو مستبادله هم نوع یا دو سمت باشد مختلف النوع متادیه  
 ثانیاً هر دو مستبادله مختلف النوع یا دو سمت باشد هم نوع ممکنند



۱۷۷- تعریف - هرگاه دو خط واقع در یک سطح مستوی هرگز تقاطع  
 هر چند از طرفین بی نهایت ممتد شوند آنها را متوازی (۱۱) گوئیم



۱۷۸ - وجود خطوط متوازی از قضیه ذیل محقق میشود  
 قضیه ۲۵ - دو خط عمود بر خط ثالث دو خط متوازی  
 بر همان - اگر چنین دو خط متقاطع شوند لازم میآید که از نقطه تقاطع دو  
 بر یک خط مرور کرده باشد و محال بودن این امر را سابقا بیان

نموده ایم  
 ۱۷۹ - قضیه ۲۶ - هرگاه دو خط را خط ثالثی قطع کند  
 و خواه دو مستباده هم نوع یا دو متقابل مختلف النوع متساوی  
 خواه دو مستباده هم نوع یا دو مستباده مختلف النوع مکمل گردند  
 دو خط مسطحه و ض متوازیند

بر همان - بر هر یک از فرض موجب فرع ۱۷۶ و دوزاویه مستباده و دوازده  
 متساوی میشوند پس اثبات حکم برای همین یک حالت کفایت میکند و لهذا منتهی میکنیم  
 به = ۷ از نقطه G مفروضه بر قطعه EF عمود GH را بر AB فرود آوریم که

آن CD را بر نقطه I قطع میکند حال چون الفرض نه = ۷ و  $\widehat{FGI} = \widehat{EGH}$

(متقابل برعکس) لازم میآید که دوزاویه  $\widehat{FHG}$  و  $\widehat{FIG}$  متساوی باشند

اما  $\widehat{FHG}$  قائمه است پس  $\widehat{FIG}$  نیز قائم و  $CD \perp HI$  و بنا بر این  $AB \parallel CD$

۱۸۰- مسئلہ اصلی - بخوانیم از نقطہ مفروضہ  $C$  در خارج مستقیم

$AB$  خطی موازات  $AB$  رسم کنیم

حل - بر نقطہ  $C$  خطی مستیاری مرور میدہیم تا خط  $AB$  را قطع کند چنانچہ

زاویہ تولید نماید آنوقت بر رأس  $C$  روی قاطع زاویہ مساوی یکی از چہا

زاویہ حاصل بطوری رسم مینمایم کہ متساوی

ہم نوع یا مست یا مختلف النوع باشند

ضلع دوم این زاویہ جواب مسئلہ است

ہر چند مرتبہ رسم متوازی را بر نقطہ معین  $C$  بواسطہ تغییر استداد قاطع یا بایر

زوایای مرسومہ تکرار کنیم ہموارہ بان خط اول حاصل میگردد و از اینجا اصل

موضوع ذیل نتیجہ میشود

۱۸۱- اصل موضوع - بر نقطہ مفروضہ در خارج خط مستقیم یک خط مواز را

آن مرور میکنند نہ پیش (اصل موضوع حکمی است محقق کہ نتوان بر بانی بر آن

اقامہ نمود و فقط تجربہ بر آن را ثابت کردہ باشد و اصل موضوع فوق را باطلید

نبت میدہند)

۱۸۲- قضیہ ۲۷- ہر گاہ دو متوازی را خط ثالثی قطع کند



اولاً هر دو زاویه مستساو و له هم نوع یا دو زاویه مختلف النوع متساو  
ثانیاً هر دو زاویه مستساو و له هم نوع یا دو مستساو و له مختلف النوع  
ممکنند ( عکس ۲۶ )

برهان - تمام احکام قضیه را میتوان بنسبت فرع ۱۷ متساوی  
زاویه و له و چند راجع نمود پس کافی است ثابت کنیم که  $\angle = \angle$   
اگر  $\angle > \angle$  فرض شود بواسطه خط  $DE$  جزو  $EDC$  را از  $\angle$  باندازه  
جدا میکنیم پس بقیه  $DE \parallel CF$  و اگر  $\angle < \angle$  فرض شود بواسطه خط  
 $Da$  جزو  $BDO$  را بر  $\angle$  میافزایم تا مساوی با  $\angle$  گردد و باز بقیه  
 $BDO \parallel CF$  خواهد بود لیکن بالفرض  $AB \parallel CF$  و لهذا بر هر دو  
فرض لازم میآید که بر نقطه  $D$  دو خط موازات  $CF$  مرور نماید و این امر  
بوجب اصل موضوع اقلیدس محال است

۱۸۳ - فرع - دو خط موازی با خط ثالث خود متوازیند

طریقه برهان - قاطعی رسم نموده بوسیله قوت فرض ۲۷ را  
در دو خطی که باید توازی آنها اثبات شود استنباط میکنیم

۱۸۴- فرع - هرگاه خطی بر یکی از دو متوازی عمود شود بر دیگری نیز عمود است

طریقه برهان - از دو زاویه متبادله دایم یک قائمه است

۱۸۵- فرع - هرگاه اضلاع دو زاویه متوازی و مماس در جهت واحد یا خلاف جهت باشند آن دو زاویه متساویست

طریقه برهان - دو ضلع غیر متوازی زاویه تشکیل میدهند که بحکم ۲۷ با زاویه مفروضه مساوی است

۱۸۶- فایده - اگر دو ضلع متوازی در یک جهت دو ضلع دیگر در خلاف جهت باشند دوزاویه مکمل خواهند بود (چرا)

۱۸۷- فرع - هرگاه اضلاع دو زاویه بر یکدیگر عمود باشند دوزاویه مساوی یا مکمل خواهند بود

طریقه برهان - از رأس یکی دو خط موازات دو ضلع دیگری رسم میکنیم زاویه این دو خط از طرف فی بفرع <sup>۱۸۵</sup> با زاویه دوم مساوی است و از طرف دیگر چون بفرع <sup>۱۸۴</sup> دو ضلعش بر دو ضلع



زاویه اول عمود است با این زاویه منقسم مشترک دارد و لذا مساوی با <sup>سنت</sup>

ب - احکام متوازی الاضلاع  
 ۱۸۸ - تعریف - متوازی الاضلاع ذوالربع اضلاعی است که ضلع



دو به دو متوازی باشند ۳۹

۱۸۹ - قضیه ۲۸ - در هر

متوازی الاضلاع اولاً  
 دو زاویه که یک ضلعشان مشترک است مکمل یکدیگرند ۲۷  
 ثانیاً دو زاویه مقابل یعنی آنها که ضلع مشترک ندارند

مساویند ( ۱۸۵ )

ثالثاً هر قطر شکل را بدو مثلث مساوی منقسم میکند  
 ( بملاحظه تساوی دو زاویه متبادله تساوی دو مثلث بحالت زمره  
 راجع میشود )

رابعاً هر دو ضلع متوازی مساویند ( از اصل قطری حکم  
 سابق دو مثلث مساوی حاصل میگردد )

خامساً دو قطر منصف یکدیگرند ( نظر بحکم چهارم و تساوی زوایای

مستبادله تساوی دو مثلث بحالت رض رض محقق و حکم ثابت می شود  
 ۱۹۰ - نتیجه ۱ - بنا بر حکم اول و دوم اگر در متوازی الاضلاع

زاویه قائمه باشد سه زاویه دیگر نیز قائمه اند

۱۹۱ - نتیجه ۲ - بنا بر حکم چهارم وقتی در متوازی الاضلاع دو ضلع

مجاور متاوی باشد شکل متاوی الاضلاع است

۱۹۲ - قضیه - ۲۹ - (عکس ۲۱) شکل ذواربعه متوازی الاضلاع

متوازی الاضلاع است :

اولاً هرگاه دو زاویه مقابل متاوی باشند

(چون بفرض  $\alpha = \gamma$  و  $\beta = \delta$  پس  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ )

ولی مجموع چهار زاویه ذواربعه اضلاع ۴ قائمه است ————— و بنابراین

$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 2$  و به قوت حکم ثابت می شود

ثانیاً هرگاه قطعه شکل را بدو مثلث متاوی تجزیه کند

(تساوی دو زاویه مستبادله دهند و سید اثبات حکم می شود)

ثالثاً هرگاه هر دو ضلع مقابل متاوی باشند

از وصل قطر دو مثلث متاوی بحالت ض ض ض حاصل و بران



بحکم سابق بر میگردد)

رابعاً هرگاه فقط دو ضلع مقابل مساوی و متوازی باشند  
(از وصل قطر دو مثلث متساوی بحالت ض ز ض حاصل شده متساوی و زاویه

متساوی خواهند محقق میشود)

خامساً هرگاه دو قطر منصف یکدیگر باشند (باز متساوی دو مثلث

بحالت ض ز ض مساوی بودن دو زاویه متساوی و داخل را ثابت میکنند)

۱۹۳- نتیجه ۱- هرگاه دو نقطه واقع در یک طرف خطی مستقیم از این خط <sup>یک</sup>

فاصله باشند خط واصل بین آنها با خط منفرجه و ض موازی است

۱۹۴- نتیجه ۲- دو خط متوازی همه جا با یک فاصله اند

از ترکیب این دو نتیجه حکم ذیل استنباط میشود

۱۹۵- مکان هندسی ۴- خطی که بفصل  $AB$  موازی است

مستقیم  $AB$  مرور کند مکان هندسی نقاطی است که در محیط

$AB$  بفصل  $AB$  موازی است واقع باشند

ج- احکام متوازی الاضلاعهای مخصوصه

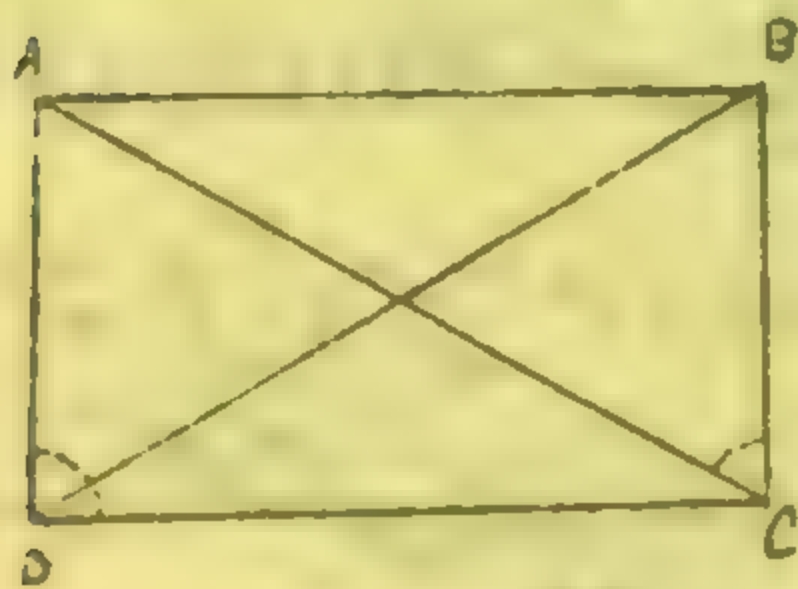
۱۹۶- تعریف- مربع مستطیل یا بالاختصار مستطیل یا سطح متوازی الاضلاع

که زوایایش قائمه باشند

۱۹۷- تعریف - معین یا لوزی متوازی الاضلاعی است که ضلعش متساوی باشند

۱۹۸- تعریف - میثی که زوایایش قائمه باشد مربع موسوم است

۱۹۹- قضیه ۳۰- در مستطیل دو قطر متساویند



زیرادو مثلث قائم الزاویه  $ADC$  و  $BDC$

متساویند ض ض

۲۰۰- فرع - در متوازی الاضلاع قطر دو

مین دوزاویه حاده ا طول است برای اثبات قضیه استعمال شود

۲۰۱- قضیه ۳۱- در لوزی دو قطر بر یکدیگر عمودند

(زیرا هر قطر قاعده مشترک دو مثلث متساوی الساقین است)

۲۰۲- قضیه ۳۲- وقتی در متوازی الاضلاع دو قطر متساوی باشند

شکل مستطیل است (متساوی دو مثلث که در یکضلع مشترکند ض ض ض ض)

و سید اثبات متساوی دوزاویه مکمل میشود

۲۰۳- قضیه ۳۳- وقتی در متوازی الاضلاع دو قطر بر یکدیگر عمود باشند

شکل لوزی است (متساوی دو مثلث قائم الزاویه بحالت ض ض ض ض و سید



اثبات حکم است

۲۰۴ - نتیجه - از قضیه ۲۲ و ۲۳ وقتی در متوازی الاضلاع دو قطر متساوی <sup>مستوی</sup>

بر یکدیگر باشند شکل مربع است

۵ - بعضی موارد استعمال احکام سابقه

۲۰۵ - تعریف - مرکز کشیر الاضلاع نقطه ایست در درون آن که هر خطی را

مردر نموده و از طرفین محیط شکل منتهی شود بر این نقطه متصفیف گردد

۲۰۶ - فرع ۱ - در متوازی الاضلاع نقطه تقاطع دو قطر مرکز است <sup>بروزن</sup>

نقطه در جهت خستیار می خطی رسم کنیم جزئی از آن که در داخل متوازی الاضلاع است

بر نقطه تقاطع دو قطر نصف میشود (اثبات بواسطه تساوی دو مثلث بجای از من)

۲۰۷ - فرع ۲ - در مستطیل مرکز از چهار رأس بیک فاصله است و عبارت از <sup>نقطه</sup>

دائره که از این مرکز شعاع نصف قطر مستطیل رسم شود بر دوس آن میگذرد

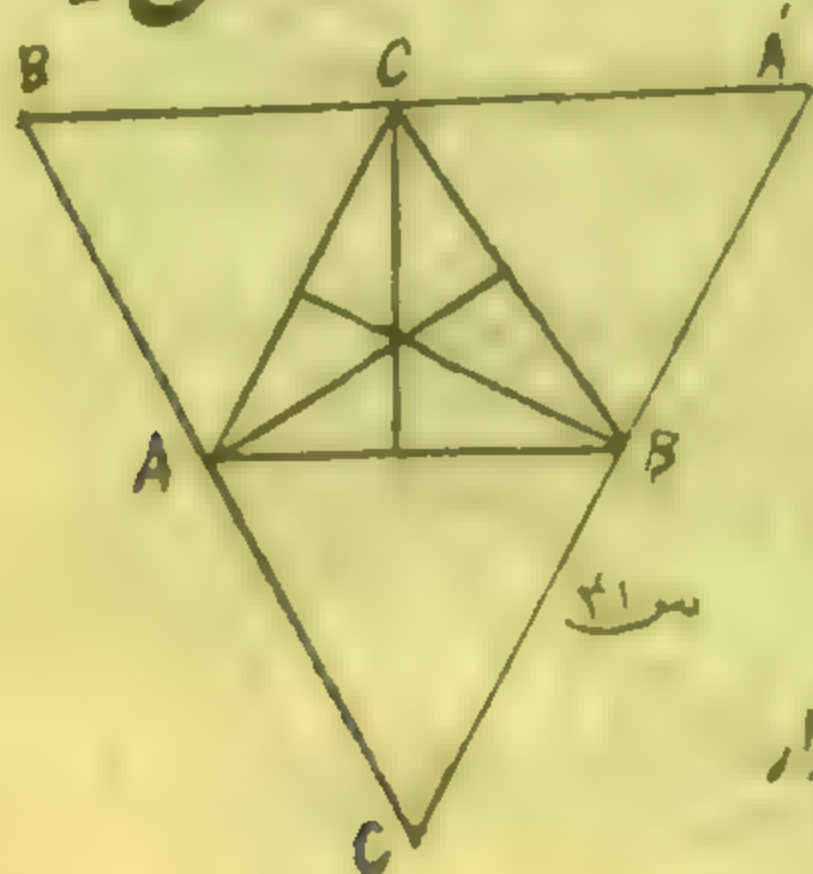
۲۰۸ - فرع ۳ - مرکز لوزی از چهار ضلع آن بیک فاصله است زیرا دو قطر

لوزی نصف الزاویه های شکلند

۲۰۹ - فرع ۴ - مرکز مربع رسم از چهار ضلع و رسم از چهار رأس

بیک فاصله واقع است

۲۱۰- قضیه ۳۴- سه ارتفاع هر مثلث بر یک نقطه تقاطع میکنند (مستقار)



برهان - از دو مثلث  $ABC$  <sup>۱</sup>

سه خط بموازات سه ضلع رسم میکنیم تا مثلث

$A'B'C'$  حاصل شود پس ملاحظه میکنیم که بر

هر ضلع مثلث دو متوازی الاضلاع قیسه و از این قرار

بر ضلع  $AB$  دو متوازی الاضلاع  $ABCB'$  و  $BAC'A'$

$BCA'C'$  و  $CBA'B'$  و  $BC$  و  $BC'$  و  $BC$  و  $BC'$

$CAB'A'$  و  $ACB'C'$  و  $AC$  و  $AC'$  و  $AC$  و  $AC'$

و بنا بر این معلوم میشود  $CA' = CB' (= AB)$  و  $AC' = AB' (= BC)$

و  $BA' = B'C' (= AC)$  و  $A$  و  $B$  و  $C$  بر او ساط اضلاع مثلث

$A'B'C'$  واقع بطوریکه ارتفاعات مثلث  $ABC$  عمودهای منصف

اضلاع  $\triangle A'B'C'$  خواهند بود و سابق ثابت کرده ایم که سه خط اخیر

مستقارند قیبت المطلوب

۲۱۱- قضیه ۳۵- خطی که از وسط یک ضلع مثلث بموازات

ضلع دیگر رسم شود ضلع سوم را نصف میکند و برتری از آن

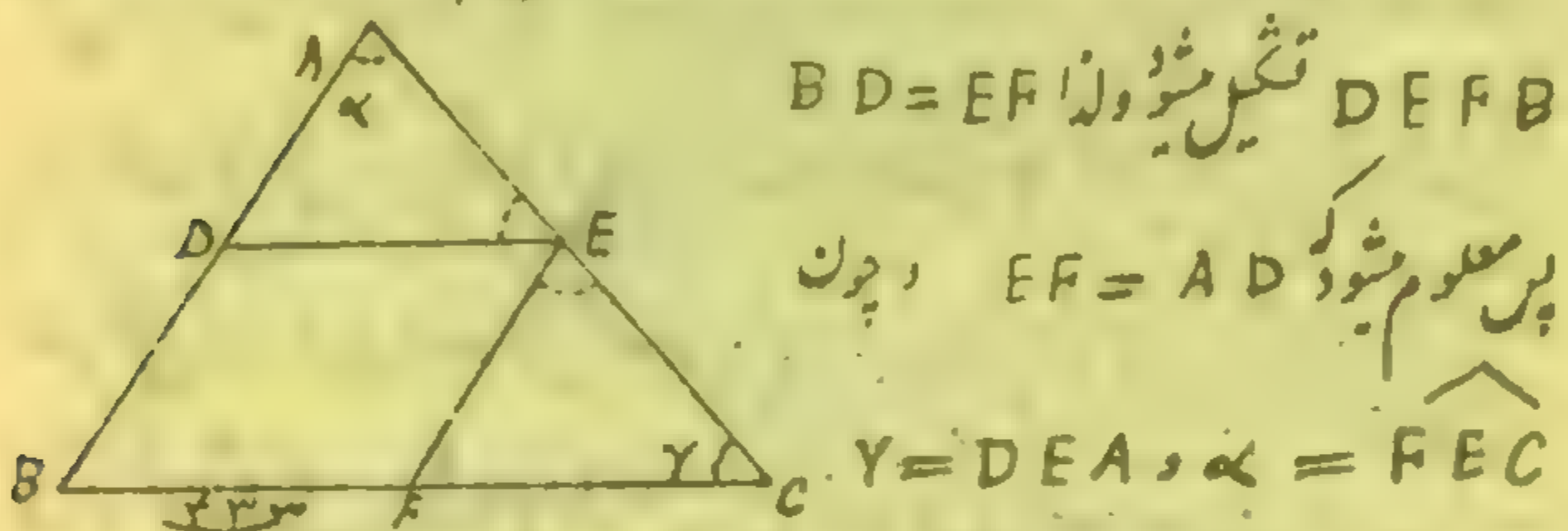


که در داخل مثلث میافتد نصف ضلع دوم است

ف س ۲ -  $DE \parallel BC$  ،  $BD = AD$

ح -  $DE = \frac{BC}{2}$  و  $AE = CE$

ب - چون  $EF$  را موازات  $AB$  رسم کنیم متوازی الاضلاع



$DEFB$  تشکیل میشود و لذا  $BD = EF$

پس معلوم میشود که  $EF = AD$  و چون

$\gamma = \angle DEA$  و  $\beta = \angle FEC$

(متقابل داخل و خارج) نتیجه میشود  $\triangle ADE = \triangle EFC$

و بنابراین اولاً  $AE = CE$

مساوی مثلث

$BE = FC$

ثانیاً چون

دو ضلع مقابل متوازی الاضلاع

$DE = BE$

$DE = BC$

پس از جمع

$DE = \frac{BC}{2}$

یا

۲۱۲ - فرج - چون یک ضلع مثلث را بر  $n$  جزو مساوی منقسم نموده از نقاط

خطوطی موازات ضلع دیگر رسم کنیم این خطوط ضلع سوم را بر  $n$  جزو مساوی تقسیم میکنند

طریقه برهان - چون خطوط منفرجه بر نقاط تقسیم ضلع اول موازات ضلع سوم  
مرور دسیم  $n$  مثلث متساوی حاصل میشود

۲۱۳- مسئله اصلی - میخواهیم خط  $AB$  را بر  $n$  جزو متساوی منقسم کنیم

حل - چون بر نقطه  $A$  خطی جهتیاری مرور داده و است از نقطه  $A$  متوازی  
 $n$  قطعه متساوی بر آن نقل کرده منتهایا به نقطه  $B$  وصل کنیم و از منتهای

قطعه خطی موازات خط وصل رسم نمایم سند حل میشود (فرع فوق)  
۲۱۴- قضیه ۳۶- خطی که از وسط یک ضلع مثلث بوسط ضلع  
دیگر وصل شود نصف ضلع سوم و موازی نیست

طریقه برهان - قضیه ۳۵ و بران خلف بسید اثبات  
می شود . . .

۲۱۵- تعریف - میانه مثلث خطی است که رأس مثلث را به وسط ضلع  
متقابل وصل نماید

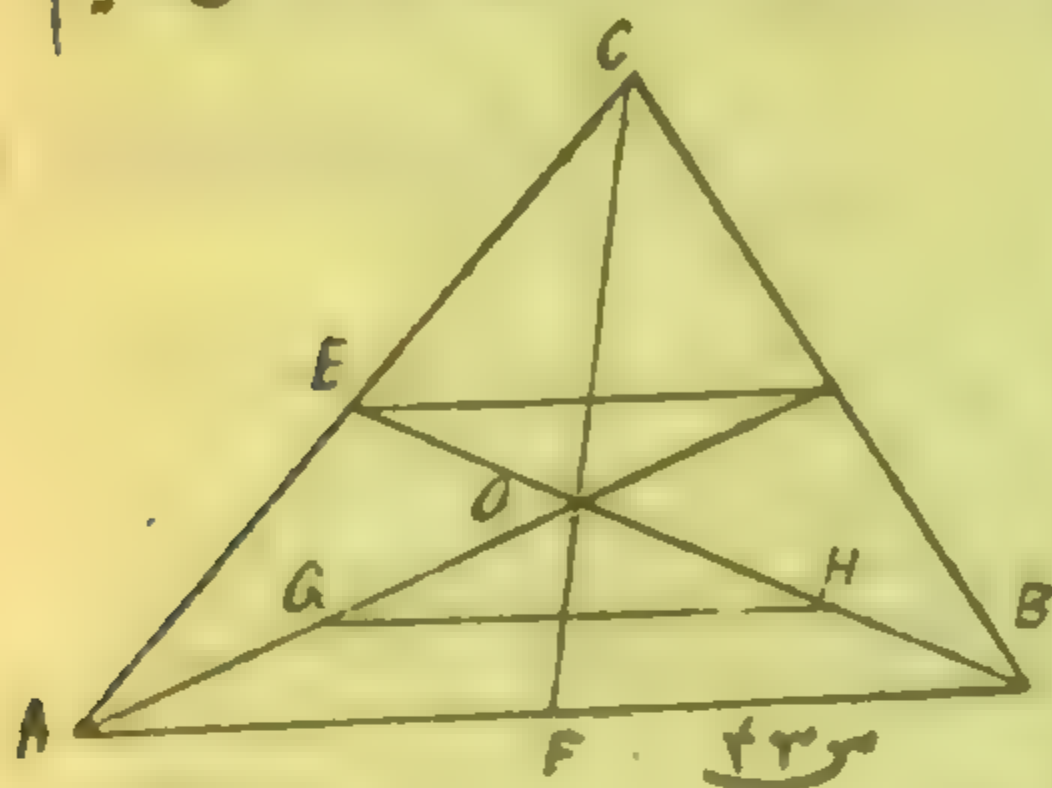
۲۱۶- قضیه ۳۷- سه میانه هر مثلث بر یک نقطه تقاطع میکنند که ابتدا

از اضلاع برثلث میانه ها واقع است

ب - فرض میکنیم نقطه  $O$  محل تقاطع دو میانه  $BE$  و  $AD$  باشد



و دو نقطه  $AO$  و  $BO$ ، نصف نمود.  $ED$  و  $GH$  را وصل کنیم



پس  $GH = \frac{AB}{3}$

و  $DE = \frac{AB}{3}$

پس  $GH = DE$

و چون  $GH \parallel DE$  (۵)

معلوم میشود  $\angle HGO = \angle EDO$ ،  $\angle GHO = \angle DEO$

و بنابراین  $\triangle OGH = \triangle ODE$  (رض ز)

و از اینجا نتیجه میشود  $DO = OG = GA = \frac{AD}{3}$

و  $EO = OH = HB = \frac{BE}{3}$

و بهین طریق معلوم میشود که سیاه  $CF$  نیز بر ثلث  $AD$  ابتدا از ضلع  $BC$  یعنی نقطه  $O$  رد میکند

۲۱۷- تنبیه - در علم جبر ثقال ثابت میشود که نقطه تقاطع میان مرکز ثقل مثلث

## تمرینات

۱- مطلوب است برای این احکام ذیل :

۱- دو متوازی الاضلاع که در دو ضلع مجاور و فاصد دو ضلع مقابل قائمی باشند متساوی میشوند

۲- دو متوازی الاضلاع که در دو قطر و زاویه مینا متساوی باشند متساویند

۳- دو متوازی الاضلاع که در یک ضلع و دو قطر متساوی باشند متساویند

۴- چهار منصف الزاویه متوازی الاضلاع از تقاطع با یکدیگر مستطیل میسازند

۵- چهار منصف الزاویه بر مستطیل از تقاطع با یکدیگر مربعی میسازند

۶- اوساط اضلاع هر چهار ضلعی رؤس یک متوازی الاضلاع میسازند

== لوزی == مستطیل ==

== مستطیل == لوزی ==

== مربع == مربع ==

۷- خطوط واصل بین اوساط اضلاع مثلث آن را بر چهار مثلث متساوی مخزنی میسازند

ب) مطلوب است حل در رسم سائل ذیل

مسئله ۱- مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید

اولاً  $a$ ،  $b$ ،  $c$  ثانیاً  $a$ ،  $b$ ،  $\alpha$  ثالثاً  $a$ ،  $\alpha$ ،  $\beta$

$ka$ ،  $m_a$ ،  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$ ،  $ka$ ،  $ka$ ،  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$



دادنا  $\alpha$  و  $k_c$  و  $m_c$  سابقا  $\alpha$  و  $b$  و  $m_c$

مسئله ۲ - مثلثی از معادلات  $c + b + \alpha$  و  $k_c$  رسم کنید

راه حل - رأس  $c$  متعلق مثلثی است که یک ضلعش  $c + b$  و یک

ضلعش  $k_c$  و یک زاویه اش  $\alpha$  است

مسئله ۳ - مثلثی از معادلات  $c + b + a$  و  $k_a$  رسم کنید

مسئله ۴ - باستقامت لوزی از نقطه مفروضه خطی موازات خط مفروضه می‌گذرد

مسئله ۵ - مربعی رسم کنید که قطرش معلوم است

مسئله ۶ - از مستطیل یک ضلع و قطرش معلوم است آن را رسم کنید

مسئله ۷ - منفرجه لوزی رسم کنید که ضلع و یک قطرش معلوم است

مسئله ۸ - مثلثی از  $a$  و  $m_b$  و  $m_c$  رسم کنید

مسئله ۹ - مثلثی از  $m_a$  و  $m_b$  و  $m_c$  رسم کنید

طریقه حل - چون یک میانه مثلث را از طرف ضلع باندازه ثلث خود جدا کرد

رأس مجاور را به سمتی که حاصل می‌شود که آنجا عرض  $m_c$  و

$\frac{2}{3} m_c$  و  $\frac{2}{3} m_b$  می‌باشد در رسم این مثلث رسیدیم

مثلث مطلوب می‌گردد

## ه - احکام ذوزنقه

۲۱۸ - تعریف - ذوزنقه اضلاعی را که فقط دو ضلع متوازی دارد

ذوزنقه گویند دو ضلع متوازی را دو قاعده ذوزنقه گویند و دو ضلع غیر متوازی را

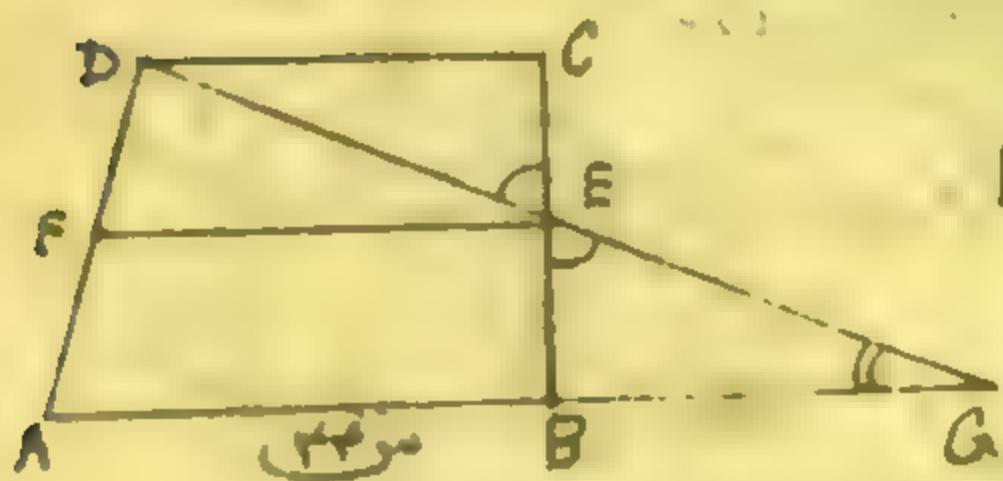
ساقین و خطی که وسط دو ساق را وصل میکند میانه ذوزنقه اصطلاح کرده اند

۲۱۹ - قضیه ۳۱ - خطی که از وسط یک ساق ذوزنقه بگذرد

و قاعده رسم شود میانه ذوزنقه و مساوی نصف مجموع دو قاعده است

ف بر ۳۲  $EF \parallel AB$ ,  $DF = AF$  و  $CD \parallel AB$

ح - ۱ -  $BE = CE$



$$EF = \frac{AB + CD}{2} \quad ۲$$

ب -  $DE$  را وصل نموده شد

میدیم تا است  $AB$  را بر  $G$  قطع کنه آنوقت  $DE = GE$  ۲۵

و  $EF = \frac{AG}{2}$  اما چون دو مثلث  $DEC$  و  $GEB$  متساویه

(رض ز) پس اولاً  $CE = EB$

و چون  $BG = CD$  و بنا بر این  $AG = AB + CD$  دار طرف دیگر

$$EF = \frac{AG}{2} \quad \text{معلوم میشو که ثانیاً} \quad EF = \frac{AB + CD}{2}$$



۲۲۰ - قضیه ۳۹ - میان دو زلفه موازی با دو قاعده  
و نیمه مجموع آنها است

طریقه برهان - باز چون بر نقطه  $E$  خط  $DG$  را (شکل سابق) مروریم  
و مثلث متساوی حاصل شود (چون بفرض  $CE = BE$  پس  $DE$   
مساوی  $EG$  خواهد بود . . . . .)

۲۲۱ - فرع - میان دو زلفه هر یک از دو قطر تقصیف میکند

## تمرینات

مطلوب است بر این احکام ذیل

۱ - در دو زلفه متساوی التاقین دو زاویه مجاوره بر قاعده متساویند  
۲ - هرگاه در دو زلفه دو زاویه مجاوره یک قاعده متساوی باشند  
دو زلفه متساوی التاقین است

۳ - در دو زلفه متساوی التاقین دو قطر متساویند

۴ - رؤس دو زلفه متساوی التاقین بر محیط یک دایره واقعند

۵ - هرگاه رؤس دو زلفه بر محیط یک دایره باشند دو زلفه

متساوی التاقین است

# کتاب دوم - احکام دایره

## فصل اول

### قوسی - زوایای مرکزی و محاطی

۱- قوس زوایای مرکزی - (با احکام تعاریف از نمرة ۲۲ تا ۶۰ ج ۱)

۲۲۲- تعریف - زاویه حادثه ما بین دو شعاع واصل بین مرکز و طرفین

قوس را زاویه مرکزی گوئیم

۲۲۳- فرع ۱- هر قوس زاویه مرکزی نظیر خود دارد و بالعکس

۲۲۴- فرع ۲- زاویه مرکزی نظیر نیم دایره نیم سطح است

۲۲۵- قضیه ۴۰- هرگاه در یک دایره یا دو دایره متساوی

دو قوس متساوی باشند دو زاویه مرکزی نظیرشان

نیز متساوینند و بالعکس

چون ملاحظه کنیم که موافق آنچه سابقاً ذکر کرده ایم اندازه عددی زاویه همان

اندازه قوس نظیر آن است قضیه محقق میشود و بسا و به مکرر است بوسیله

انطباق نیز مسلم را ثابت کرد (اثبات با انطباق بر عهده متعلم است)



۲۲۶ - فرع - در یک دایره یا دو دایره متساویه زاویه مرکزی نظیر قوس  
اطول انقسم است و بالعکس

## ب - زاویه محاطی و اندازه آن

۱۲۱ - تعریف - قطعه مستیمی که طرفین قوس را ( مابین دو نقطه محیط را )  
بیسد گیرد وصل کند و وتر موسوم است

۲۲۸ - فرع - هر قوس ( یا هر زاویه مرکزی ) فقط یک وتر نظیر دارد اما هر  
محیط دایره را به دو قوس که هر دو نظیر آن وترند منقسم میکند لیکن معمولاً وتر را  
بقوس کوچکتر نسبت میدهند

۲۲۹ - تعریف - زاویه محاطی زاویه ایست که رأسش بر محیط و دو ضلعش  
دو وتر باشند و قوسی را که مابین دو ضلع و زاویه محاطی محصور است  
قوس مقابل آن نامند

۲۳۰ - فرع - هر زاویه محاطی فقط یک قوس مقابل دارد و اما  
بر قوس عده بیشاری زوایای محاطی نظیر دارد

زوایای محاطی بیشاری را که در قوس مقابل مشترک باشند میتوان  
به دسته منقسم ساخت :

دسته اول آنکه مرکز بر یک ضلعشان واقع است

= دوم = = مابین دو =

= سوم = = خارج از دو =

۲۳۱- قضیه ۴- هر زاویه محاطی نصف آن زاویه مرکزی  
که دارای همان قوس مقابل باشد

برهان - اگر زاویه محاطی از دسته اول باشد سر ۴۵- زاویه مرکزی

زاویه خارج از مثلث  $MPB$  میشود و به قضیه ۱  $\widehat{APB} = \frac{\widehat{AMB}}{2}$

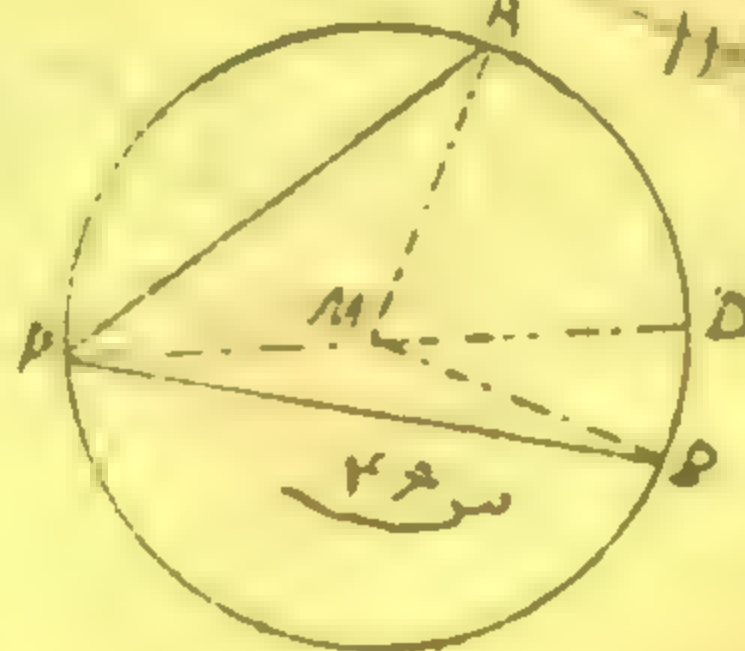
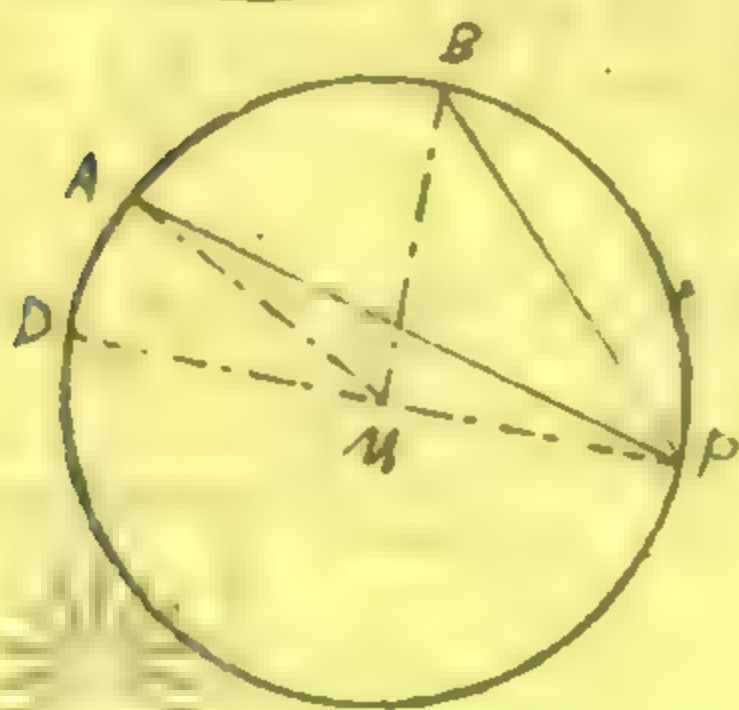
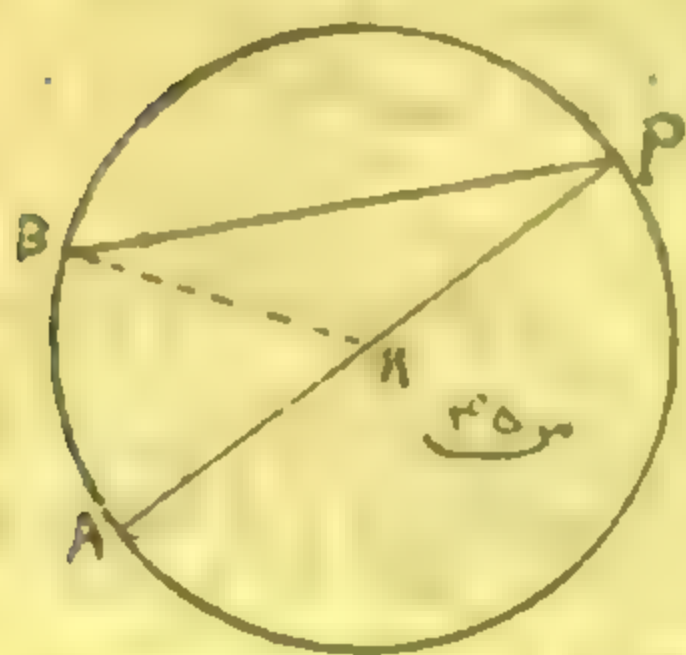
اگر زاویه محاطی از دسته دوم سر ۴۶ باشد قطر  $PD$  را وصل میکند

$$\widehat{APD} = \frac{\widehat{AMD}}{2} \text{ بن}$$

$$\widehat{DPB} = \frac{\widehat{DMB}}{2} \text{ و}$$

$$\widehat{APD} + \widehat{DPB} = \frac{\widehat{AMD} + \widehat{DMB}}{2} \text{ لذا}$$

$$\widehat{APB} = \frac{\widehat{AMB}}{2}$$





در حالت سوم  $\frac{1}{2}$  استرال عینا همین است منتها بعض جمع دای  
آنها را از یکدیگر تفریق میکنیم

۲۳۲ - نتیجه ۱ - دو زاویه محاطی که در قوس مقابل مشترک باشند متساوی

۲۳۳ - نتیجه ۲ - در یک دایره یا دو دایره متساویه زوایای محاطی

که قوسهای مقابلشان متساوی باشند متساویند

۲۳۴ - نتیجه ۳ - زاویه محاطی در نصف دایره قائمه است

۲۳۵ - نتیجه ۴ - زاویه محاطی منفرجه یا حاده است موافق آنکه قوس

مقابلش بزرگتر یا کوچکتر از نصف دایره باشد

۲۳۶ - نتیجه ۵ - اندازه عددی هر زاویه محاطی نصف اندازه قوس

مقابل آن است

مقیاس زاویه محاطی نصف قوس مقابل آنست

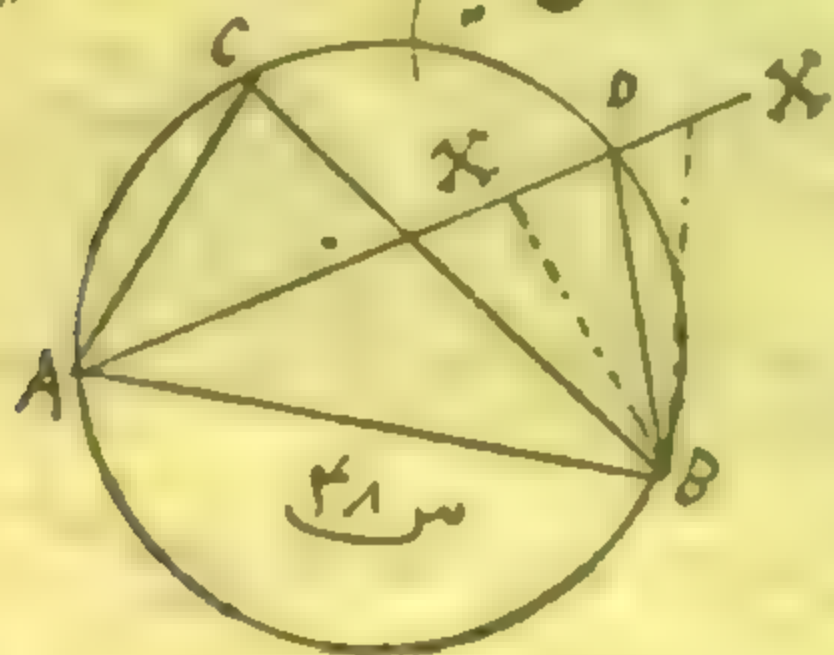
۲۳۷ - تنبیه - برای اثبات تساوی دو زاویه بکنند بوسید محاطی

دادن آنها ثابت کنند که قوس مقابلشان مشترک یا قوس مقابلشان متساوی

۲۳۸ - هفتمیه ۴۲ - قوس جمع زوایای متساویه که اضلاعشان

بر دو نقطه معین مرور کنند و رؤسشان در یک طرف خط واصل  
بین این دو نقطه باشد بر محیط یک دایره واقعند

برهان - بر سه نقطه A و B و C سه دایره مرور می‌دهیم و گوئیم  
بفرض اینکه  $\widehat{ACB}$  و  $\widehat{ADB}$  متساوی باشند دایره مروره بر نقطه D نیز  
مرور میکند و الا لازم آید که AD یا است و آنرا بر نقطه مانند X قطع کند و این  
غایات است زیرا چون X را به B وصل کنیم به قاعده نتیجه ۱



$$\widehat{ACB} = \widehat{AXB}$$

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} \text{ و با فرض}$$

$$\widehat{ADB} = \widehat{AXB} \text{ پس نتیجه شود}$$

و چون از سابق می‌دانیم که زاویه خارجی هر مثلث از زاویه داخل مقابل آن بزرگتر است  
تساوی اخیر تساوی جنس و در کل و لذا محال است

۲۳۹ - نتیجه - رؤس زوایای قائمه که دو ضلعشان بر دو نقطه معین مرور

کند بر محیط دایره واقع است که قطرش خط واصل بین دو نقطه معین و ضلع باشد

۲۴۰ - مکان هندسی د - محیط دایره که بر قطر AB رسم شود مکان هندسی

رؤس زوایای قائمه است که اضلاعشان بر دو نقطه A و B مرور کند



۲۴۱- مکان هندسی  $\alpha$  - قوسی از دایره که  $AB$  وتر آن یک زاویه  
مخالفش مساوی  $\beta$  باشد مکان هندسی رؤس زوایایست که بر دایره  
 $AB$  مساوی  $\beta$  باشند و اضلاعشان بر دو نقطه  $A$  و  $B$  بگذرند

۲۴۲- تعریف - قطعه از دایره را که تمام زوایای محاطیه آن مساوی زاویه  
 $\beta$  باشد حاوی زاویه  $\beta$  گویند

## فصل دوم - احکام راجعه بختیم و دایره

### ۱- اوتار فواصل آنها از مرکز

۲۴۳- قضیه ۴۳- در یک دایره یا دو دایره متساویه  
اولاً- هرگاه دو قوس (یا دو زاویه مرکزی) متساوی باشند  
و وتر نظیر آنها متساویند و بالعکس  
ثانیاً- وترهای که قوس وتر آن (یا زاویه مرکزی نظیر آن) اعظم است  
اطول خواهد بود و بالعکس

طریقه برهان - چون مرکز را بطرفین دو وتر وصل نمایم دو مثلث متساوی الساقین  
که در ساقین همواره متساویند حاصل میشود و بتساوی دو مثلث یا قوس ۲۲ یا ۲۳  
احکام قضیه محقق میشود .

۲۴۴- قضیه ۴۲- اولاً عسودیکه از مرکز دایره بر قوس  
میآید آن وتر و زاویه مرکزی (یا قوس) نظیر آنرا نصف میکنند  
ثانیاً عسود نصف هر وتر بر مرکز دایره میگذرد

طریقه برهان - مرکز را بطرفین وتر وصل کنیم و احکام قضیه را از احکام  
در مثل متساوی الساقین محقق است استنباط مینمایم

۲۴۵- مسئله اصلی ۱- میخواهیم مرکز دایره یا قوس مفروض را بیابیم  
حل - دو وتر غیر متوازی با اختیار مرور داده و عسود نصف آنها را رسم  
میکنیم حکم قضیه فوق مرکز همان نقطه تقاطع دو عمود خواهد بود

۲۴۶- مسئله اصلی ۲- بر سه نقطه غیر واقع بر یک استقامت

دایره مرور دهید

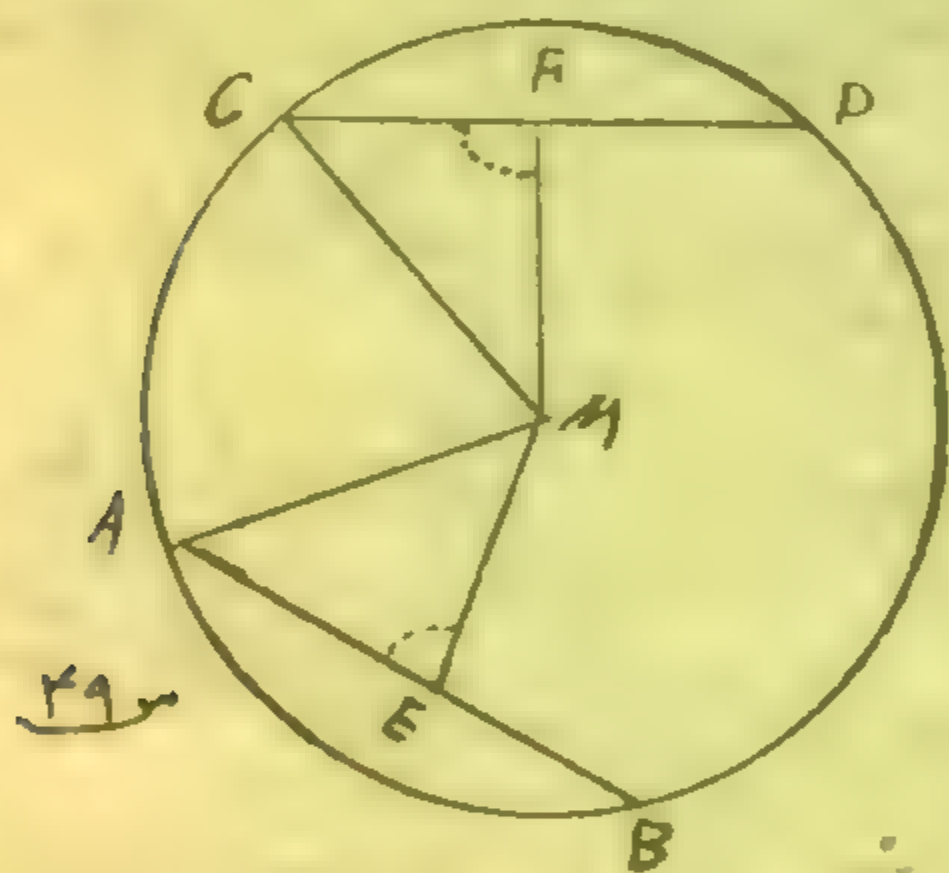
حل - چون سه نقطه معین داده و خط بیکدیگر وصل کنیم دو وتر  
غیر متوازی از دایره مطلوب به دست میآید و بنا بر این مرکز دایره نقطه تقاطع  
دو عمود نصف آنهاست

۲۴۷- تنبیه - چون دو عمود نصف بیش از یک نقطه مشترک ندارند

جواب مسئله منحصر بفرد است (ب- ق- ۱۹ رجوع شود)



۲۴۸- قضیه ۴۵- در یک دایره یا دو دایره متساویه  
 اولاً- دو وتر متساوی الطول متساوی البعدند از مرکز  
 ثانیاً- بالعکس دو وتر متساوی البعد از مرکز متساوی الطول میشوند  
 برهان- اولاً از مرکز دو نقطه  $A$  و  $C$  سر ۴۹ وصل میکنیم



بقیه ۴۴  $AE = CF$

و بفرض  $\hat{E} = \hat{F}$

و  $MA = MC$

پس  $\triangle MAE = \triangle MCF$

و بنابراین  $ME = MF$

ثانیاً- از تساوی ددشت  $MAE$  و  $MCF$  — تساوی نیمه وتر  $AE$   
 و  $CF$  و از آنجا تساوی دو وتر استنباط میشود

۲۴۹- نتیجه- اوساط اوتار متساویه در یک دایره بر محیط دایره  
 دیگر که با اولی سخته مرکز است واقع میشوند

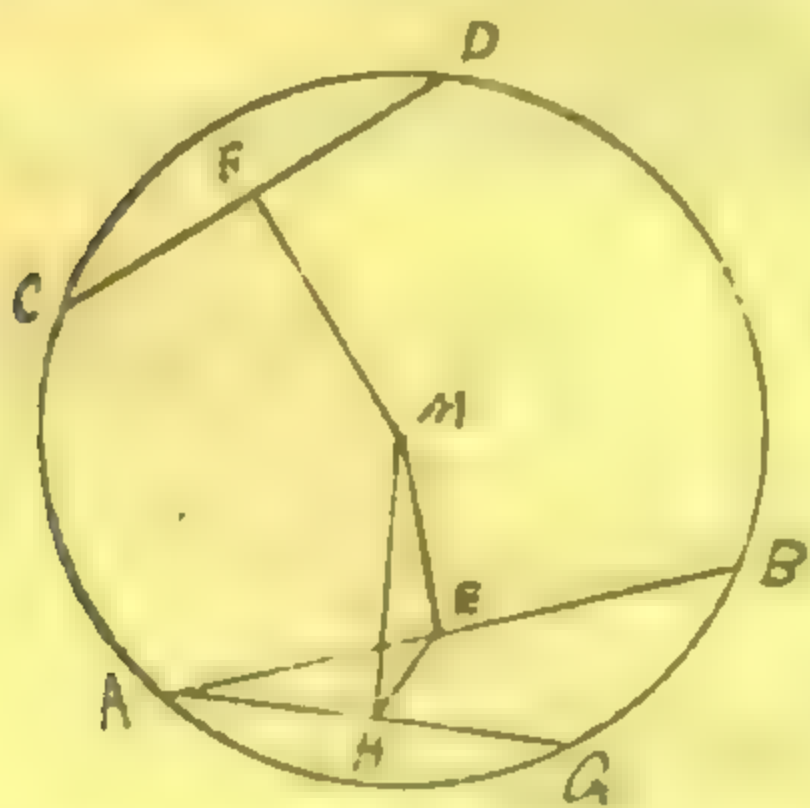
۲۵۰- قضیه ۴۶- در یک دایره یا دو دایره  
 متساویه اولاً- از دو وتر غیر متساوی وتر

اطول برکز اقرب است

ف- سه  $MF \perp CD$  و  $ME \perp AB$  و  $AB > CD$

ح-  $ME < MF$

ب- چون وتر  $AG$  را (بدو پرگار) مساوی  $CD$  رسم کنیم  
نقطه  $G$  (که اگر به قوس  $AB$  و  $CD$  است) و ابتدا مستقیماً القوس کوچکتر است) مابین  
 $A$  و  $B$  قرار میگیرد پس از وصل نقطه  $E$  به نقطه  $H$   
که وسط  $AG$  باشد زاویه  $MEH$  منفرجه حاصل  
میکرد و



ولذا  $ME < MH$

لیکن  $MH = MF$

سه

پس  $ME < MF$

ثانیاً - بالعکس از دو وتر اطول آن است  
که برکز اقرب باشد

طریقه برهان - عدم تساوی دو نیمه وتر بدلیل خلف و استیما  
۴۲ و ۴۵ و ۴۶ و ۴۷ ثابت میکنیم



۲۵۱- نتیجه - در هر دایره قطر از تمام  
او تار ا طول است

۲۵۲- مسئله اصلی - بر خط  $AB$  سراسر قطعه دایره

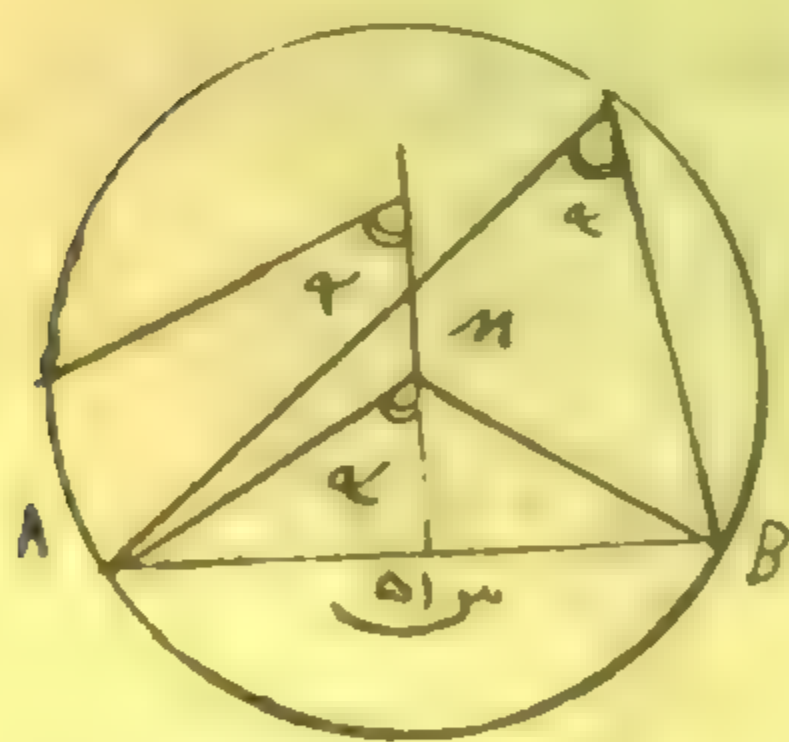
حاوی زاویه منفرجه  $\alpha$  رسم کنید

حل - از طریقی مرکز دایره بر عمود منصف  $AB$  واقع است

و از طرف دیگر زاویه بین عمود منصف و اصل نقطه  $A$  مساوی زاویه  $\alpha$  است

(زیرا زاویه محاطی  $\alpha$  نصف زاویه مرکزی  $AMB$  میباشد)

و از اینجا طریقه رسم ذیل استنباط میشود



رسم - عمود منصف  $AB$  را رسم

نموده بر یکی از نصف تا آن زاویه

مساوی  $\alpha$  میارزیم و بر نقطه  $A$  خطی

بموازات ضلع ثانی این زاویه مرور می‌دهیم تا عمود منصف را بر نقطه

$M$  که مرکز دایره مطلوبه است قطع کند

۲۵۳- ملاحظه - اگر زاویه  $\alpha$  حاده باشد قطعه حاوی بزرگتر از

نیم دایره است و اگر منفرجه باشد کوچکتر از نیم دایره

## مزیات

مسئله ۱- از مثلثی قائم الزاویه وتر و ارتفاع دارد بر آن معلوم است

مطلوب است رسم این مثلث

مسئله ۲- مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید

$$1- a, h_a, h_b, h_c, \alpha - 2$$

$$3- a, h_a, h_b, h_c, m_a, \alpha - 4$$

مسئله ۳- مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید

$$1- a, \alpha, \alpha - 2, m_a, \alpha, \alpha - 2$$

$$3- a, \alpha, \alpha - 2, h_b, \alpha, \alpha - 4, b \pm c$$

مسئله ۴- از مثلثی  $a, h_a, h_b, h_c, \alpha - 2$  معلوم است

میخواهیم مثلث را رسم کنیم (زاویه مقابل ضلع  $a + b + c$ )

مساد  $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$  خواهد بود)

## ب- قاطع و مماس

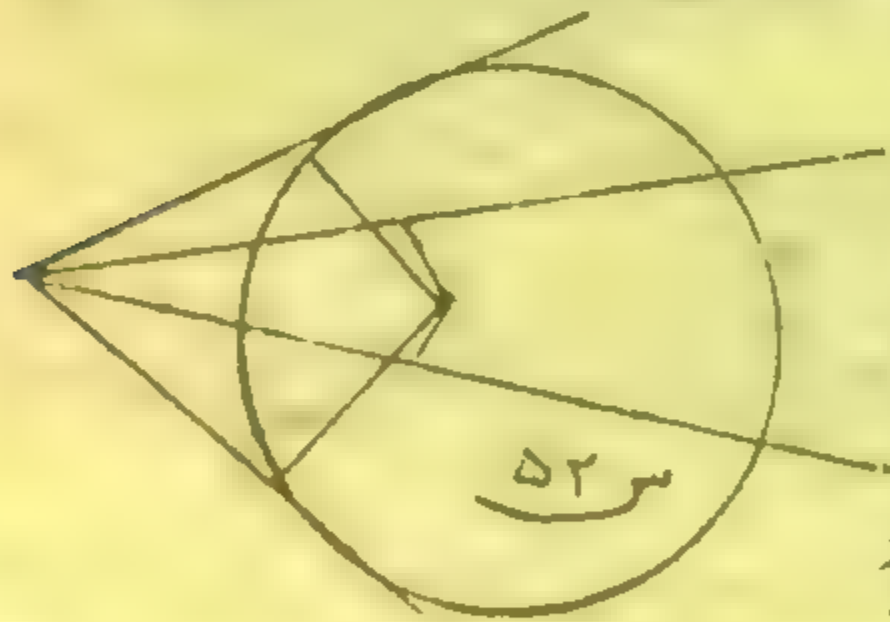
۲۵۴- تعریف- چون وتری خارج دایره است داشته باشد از قاطع تا

۲۵۵- فرغ- هر قاطع دایره را در دو نقطه قطع میکند نقطه دخول و نقطه خروج



۲۵۶ - تعریف - چون قاطع را حول یکی از نقاط آن که خارج دایره باشد  
 (مبدأ قاطع) دوران دهیم دو نقطه منتهی در جوار آن محیط دایره  
 محل می دهند و فاصله وترین این دو نقطه از مرکز دایره تقسیم میکند حال  
 اگر قاطع آفت در دوران کند که نقطه دخول و خروج بر یکدیگر منطبق شوند  
 آن از مرکز دایره مساوی شعاع میگردد و در این وضع خط (قاطع) را نسبت  
 به دایره مماس گویند و نقطه مشترک بین دایره و مماس را نقطه  
 تماس خوانند.

۲۵۷ - فرع - چون در ضمن دوران وضع مزبور دو مرتبه برای قاطع  
 حاصل شود میتوان فهمید که:



از نقطه منتهی وضع در خارج دایره همیشه  
 ممکن است دو مماس بر آن رسم کرد

۲۵۸ - قضیه ۴ - خط مماس بر شعاع نقطه تماس عمود است  
 برای اثبات این قضیه چنانکه از تعریف مماس استنباط میشود کافی است که  
 کنیم به سوار عمود یک از مرکز بر وتر منتهی در میاید منتهی آن است  
 و تری که از مماس در دایره واقع است یک نقطه منتهی است و وسط آن

نقطه دخول و خروج مشترک است

۲۵۹- نتیجه ۱- از نقطه مفروضه بر محیط دایره نقطه یک مناسب  
میستوان بر آن رسم کرد

۲۶۰- نتیجه ۲- دو مماسی که از نقطه خارجی بر دایره رسم شود متساویند  
(چون نقطه خارجی را بر مرکز و مرکز را به دو نقطه تماس وصل کنیم دو مثلث متساوی  
بجالت من من ز تولید میشود

۲۶۱- مسئله اصلی- میخواهیم از نقطه مفروضه مماسی بر دایره مفروضه رسم کنیم  
حل- این مسئله دو حالت دارد یا نقطه مفروضه بر محیط است یا در خارج دایره  
و صورت اول کافی است که نقطه مفروضه را بر مرکز وصل نموده و از همان نقطه  
عمودی بر شعاع و اصل استخراج کنیم

در صورت ثانی نقطه را بر مرکز وصل نموده دایره بقطعه خط وصل و در نیمه تا دایره  
مفروضه را بر دو نقطه تقاطع کند چون این دو نقطه را بنقطه مفروضه وصل کنیم  
جواب مسئله بدست میآید ( زیرا زاویه محیط در نیم دایره قائمه است )

۲۶۲- مکان بند سی ۷- مکان بندی مراکز دایره یک در نقطه معین با خط  
مفروضه تماس شوند عمودیت که از این نقطه بر خط مفروضه اخراج شود



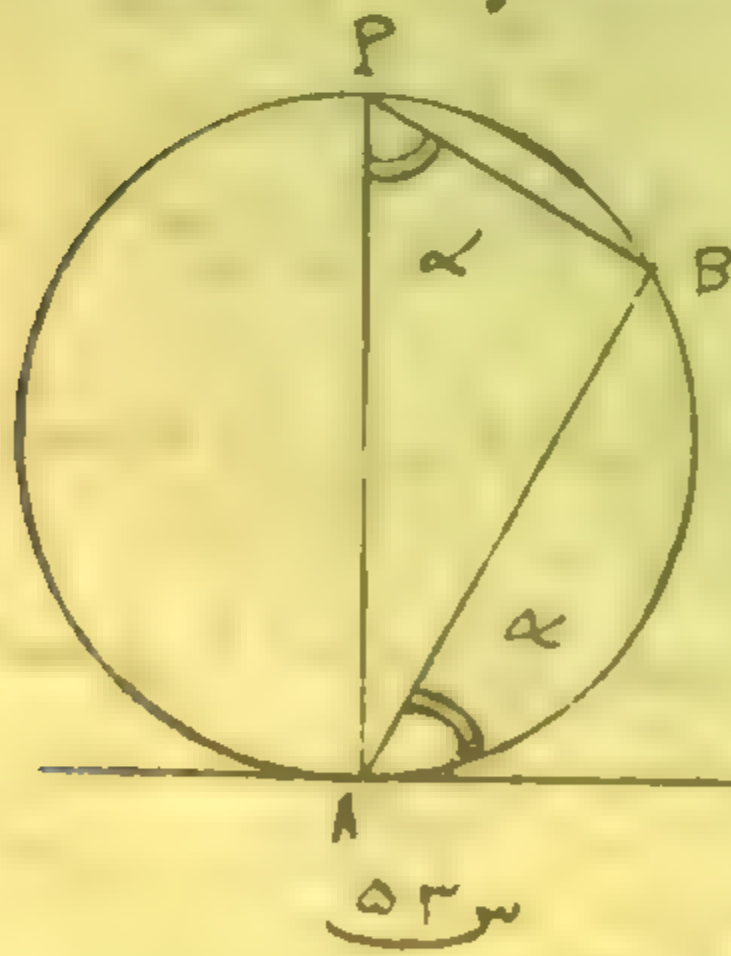
۲۶۳- فرع - مراکز جیسع دو ایریکه شعاع معین در باشند و با خط مفروض  
ماس شونند بر دو خط واقع شود که از مرکزین خط اول و بنام صد هر بموازاات آن برور کند

۲۶۴- فرع - مکان هندسی شعاع را بطریق ذیل سنیر میتوان بیان کرد  
خط منصف الزاویه مکنان هندسی مراکز دو ایریت که با دو ضلع زاویه ماس باشند

۲۶۵- تعریف - زاویه را که مابین ماس و وتر تا بر نقطه ماس حادث میشود  
زاویه ظلی گوئیم (ماس را ظل نیز نامند) و قوسید مابین دو ضلع است مقابل آن باشد

۲۶۶- قضیه ۴۸- زاویه ظلی مساوی با زاویه محاطیه است

که در قوس مقابل با آن مشترک باشد



برهان - قطر AP را وصل میکنم

دو زاویه  $\angle APB$  و  $\angle TAB$  متساویند

زیرا هر یک قائم زاویه  $\angle BAP$  میباشد

(چونکه  $\angle PAT$  و  $\angle ABP$  قائم اند)

۲۶۷- تنبیه - بوسیله وقت مکان هندسی فضا را بطریق سطر از آنجا

در نقطه ذکر کردیم میتوان رسم نمود بدین طریق که بر نقطه A مراکز زاویه

ساختم و عمودی بر ضلع دوم آن از نقطه A اخراج میکنم تا عمود منصف را بر نقطه

۸۱ تقاطع نموده مرکز را معین کنید

۲۶۸ - فرج - یکس قضیه ۴۸ صحیح است (اثبات برتعمیم است)

## تمرینات

مطلوب است برای این احکام ذیل

۱- ماسهایک سبب نشان از مرکز دایره بیک فاصله است متساویند

۲- مبداءهای جمیع ماسهای متساویه که بر دایره منفر و منفر رسم میشود بر محیط دایره واقع است که با اولی تحت مرکز است

۳- رؤس زوایای حاصل از تلاقی دو مانس در صورتیکه زوایای مزبور قائمه باشند از مرکز بیک فاصله واقعند

مسئله ۱ - بر دایره منفر و منفر ماسی بواسطه خطی مفروض (یعنی سبب) معین کنید رسم کنید

مسئله ۲ - دایره رسم کنید که بر نقطه منفر و منفر  $A$  مرکز و نقطه معین از  $BC$  با این خط مانس شود

مسئله ۳ - با شعاع معین  $r$  دایره رسم کنید که بر نقطه مفروضه و خط  $BC$  مانس شود (دو جواب)



مسئله ۴ - دایره رسم کنید که با دو خط متقاطع مماس باشد برابر آنکه نقطه تقاطع  
بر یکی از دو خط معلوم باشد

مسئله ۵ - بر نقطه مفروضه A در خارج دایره مفروضه قاطعی چنان رسم کنید  
که در دایره و تری بطول معین احداث کند شرط امکان مسئله  $۲ < ۴$  ( )  
طریقه حل - موافق نتیجه ۴۲ و آنرا قاطع مطلوب بر دایره که با دایره اول مماس است  
احداث خواهد بود پس باید این دایره را رسم نمود ( دو جواب )

مسئله ۶ - میخواهیم قاطعی رسم کنیم که در دایره مفروضه و تری بطول  
احداث نموده آنرا بر خط مفروض عمود باشد یا ثانیا با خط مفروض  
زاویه مساوی حاکم کند

مسئله ۷ - تعیین نقطه مطلوب است که مماس دایره از آن نقطه بر دایره  
مفروضه بطول معین باشد

مسئله ۸ - نقطه مطلوب است که از آن نقطه دایره مفروضه زاویه  
معین

معین رویت شود ( زاویه بین دو مماس باشد )

مسئله ۹ - نقطه تعیین کنید که چون از آن نقطه دو مماس بر دو دایره مفروضه  
رسم کنیم هر دو مماس بطول معین باشد

مسئله ۱۰ - مطلوب است یافتن نقطه که از آن نقطه دو دایره منفرجه را  
بر زاویه معین به رؤیت کنیم

ج - مثلث دوار بقیه اضلاعی محیطی و محاطی

۲۶۹ - تعریف - برگاه جمیع رؤس کثیرالاضلاع بر محیط دایره واقع باشد  
دایره را محیط بر آن کثیرالاضلاع را محاط در دایره گویند و برگاه  
اضلاع کثیرالاضلاع همه با دایره تماس داشته باشند دایره محاط و کثیرالاضلاع  
بر آن محیط است

۲۷۰ - قضیه ۴۹ - بر هر مثلث میتوان یک دایره محیط نمود  
و بعبارة اخری مثلث شکلیست قابل محیط شدن در دایره  
زیرا سه سواره بواسطه سه رأس مثلث دایره مشخص میگردد که مرکزش نقطه تقاطع  
عمودهای منصف اضلاع آن مثلث است (نتیجه ق ۱۹)

۲۷۱ - قضیه ۵۰ - مثلث شکلیست قابل محیط شدن بر دایره  
و بعبارة اخری هر مثلث را دایره ایست محاطی منحصر بفرد  
زیرا چنانکه میدانیم (ق ۲۲) سه منصف الزاویه هر مثلث بر یک نقطه تقاطع  
میکنند که از سه ضلع یک فاصله است پس چون این نقطه را مرکز نمود و شعاع



یکی از سه فاصله دایره رسم کنیم بر سه ضلع مماس در مثلث محاط میشود  
۲۷۲ - تعریف - دایره را که با یک ضلع و است و دو ضلع دیگر مثلث مماس

باشد اصطلاحاً محاطیه خارج گویند

۲۷۳ - چنانکه سابق گفته ایم منصف زوایای خارج مثلث با هر منصف الزاویه داخله  
بر یک نقطه تقاطع میکنند که نیز از سه ضلع مثلث متساوی البعد و بنابراین مرکز یک  
دایره محاطیه خارج است بروی که هر مثلث یک دایره محاطیه و سه دایره

محاطیه خارج دارد پس قضیه ذیل محقق است

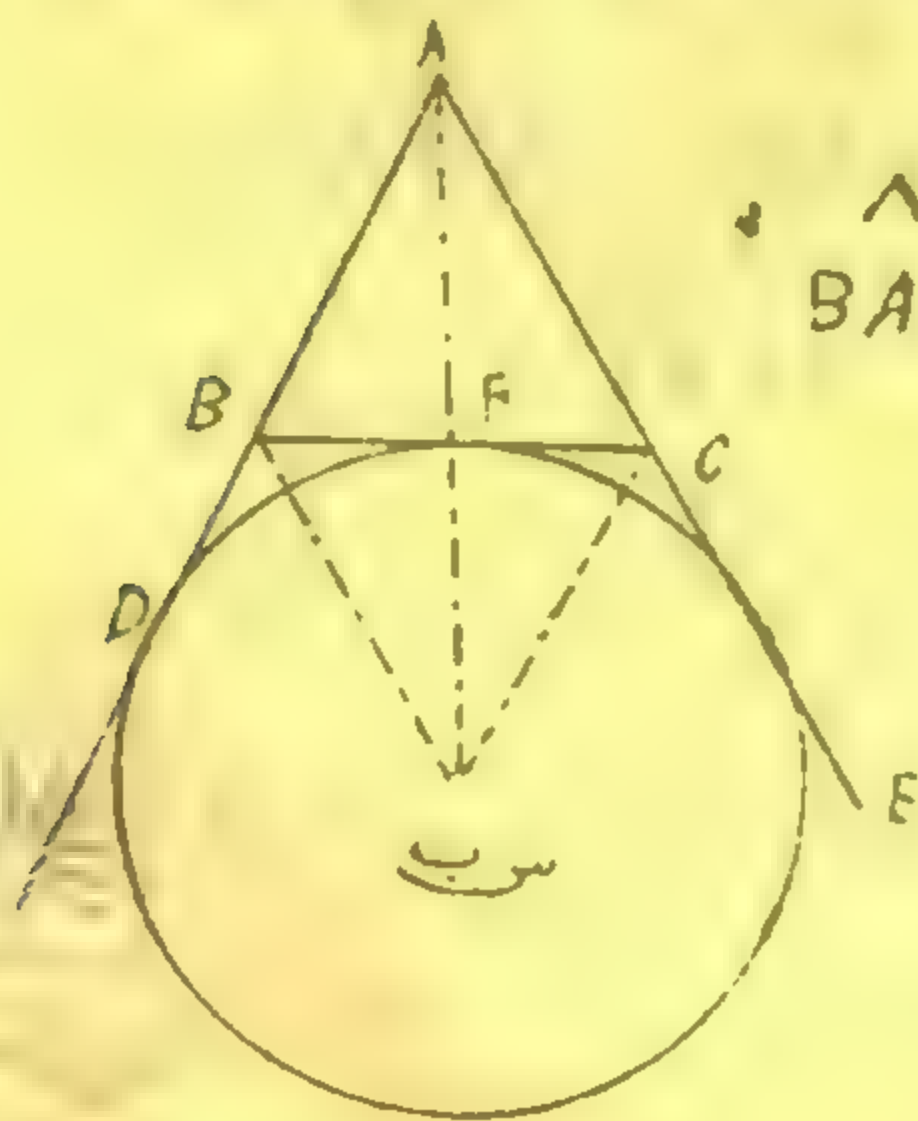
قضیه ۵۱ - بر سه خط که دو بدو متقاطع باشند (مثلث)

همواره میتوان چهار دایره مماس نمود

۲۷۴ - قضیه ۵۲ - در هر ذو اربعه اضلاع محاطی و ذو زوایا

مقابل یکدیگر بگیرند

مثلاً در مثلث  $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$



بر مان - زاویه محاطی

$\widehat{BAD}$  و زاویه مرکزی  $\alpha$

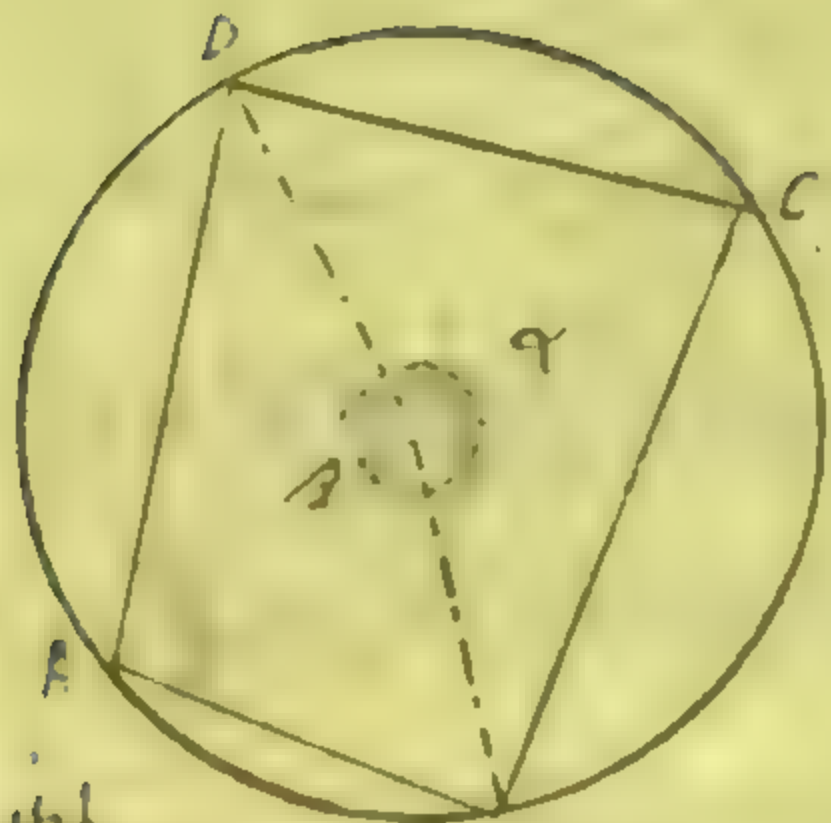
در قوس مقابل  $BCD$  مترکند

$$\widehat{BAD} = \frac{\alpha}{2} \text{ ولذا}$$

$$\widehat{BCD} = \frac{\beta}{2} \text{ بهین دلیل}$$

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ پس}$$

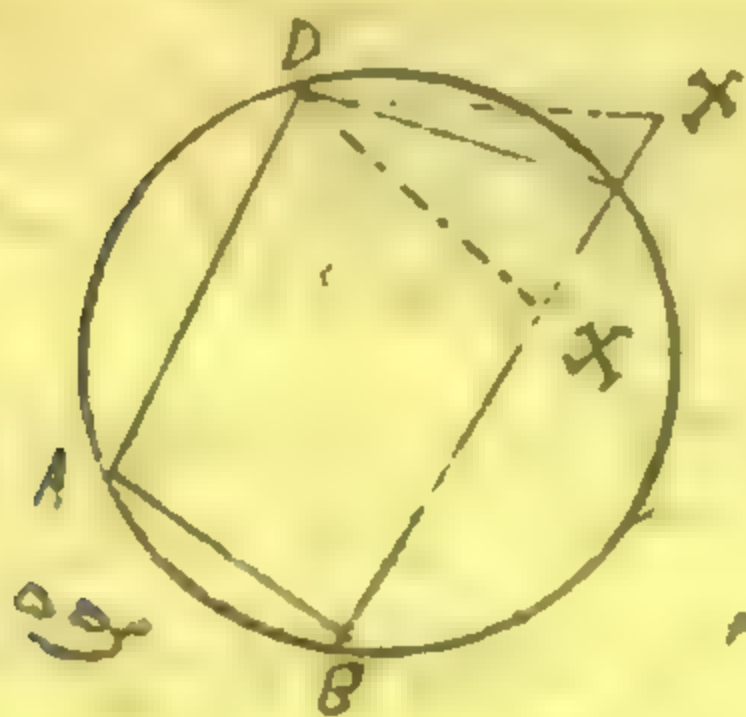
$$\alpha + \beta = 2 \text{ چون}$$



مطلوب  
سواء و هو

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$$

۱۷۵- قضیه ۵۳- (عکس) هرگاه در ذواربقة اضلاعی  
دو زاویه متقابل مکمل باشند شکل قابل محاط شدن در دایره است  
برهان- زیرا چون بر سه نقطه A و B و D سه دایره می‌کشیم  
بر نقطه C نیز می‌کشیم والا لازم آید که BC یا است داد آن را بر نقطه دیگر  
مانند X قطع کند



$$\angle CXB = 180^\circ - \widehat{A}$$

$$\angle DCB = 180^\circ - \widehat{A}$$

$$\angle CXB = \angle DCB \text{ پس معلوم شد}$$

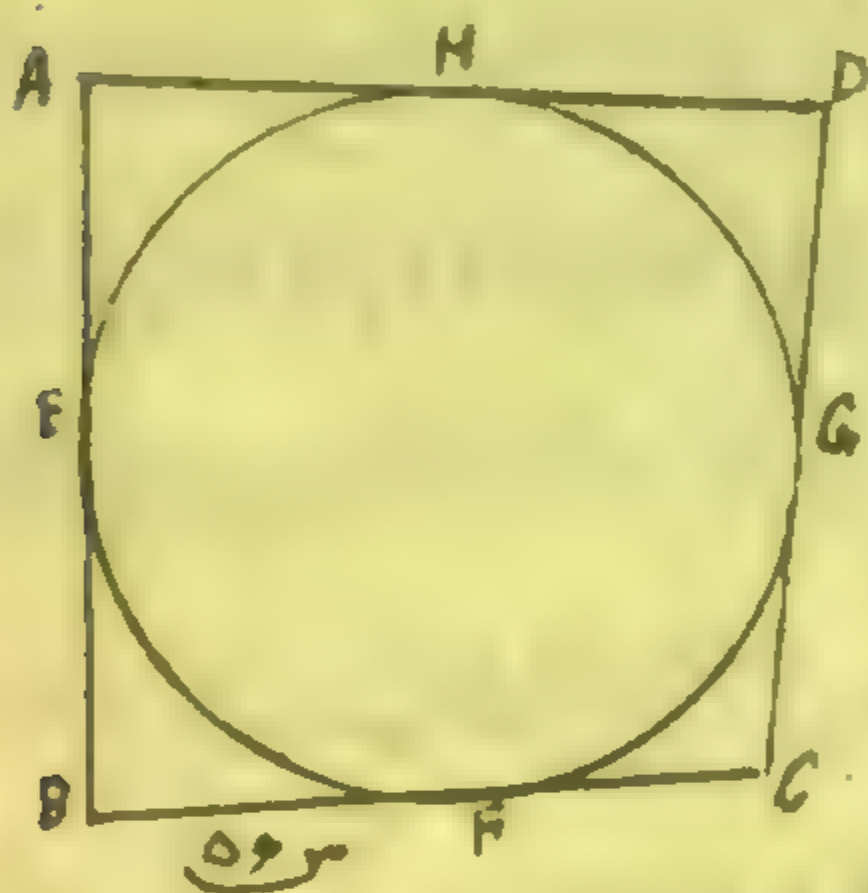
و موافق خواص زاویه خارجیه مثلث تساوی اخیر تساوی مزدوکل  
ولذا محال است



۲۷۶ - قضیه ۵۲ - در هر ذواربته اضلاع محیطی مجموع دو ضلع مقابل مساوی است با مجموع دو ضلع دیگر

$$AB + DC = AD + BC \quad \text{مثلاً}$$

برهان - اگر E و F و G و H چهار نقطه تماس باشند تا دایره ای در آن جا



$$AE = AH$$

$$BE = BF \quad \text{و}$$

$$CG = CF \quad \text{و}$$

$$GD = DH \quad \text{و}$$

که از جمع آنها بعد از اختصار نتیجه میشود

$$AB + DC = AD + BC$$

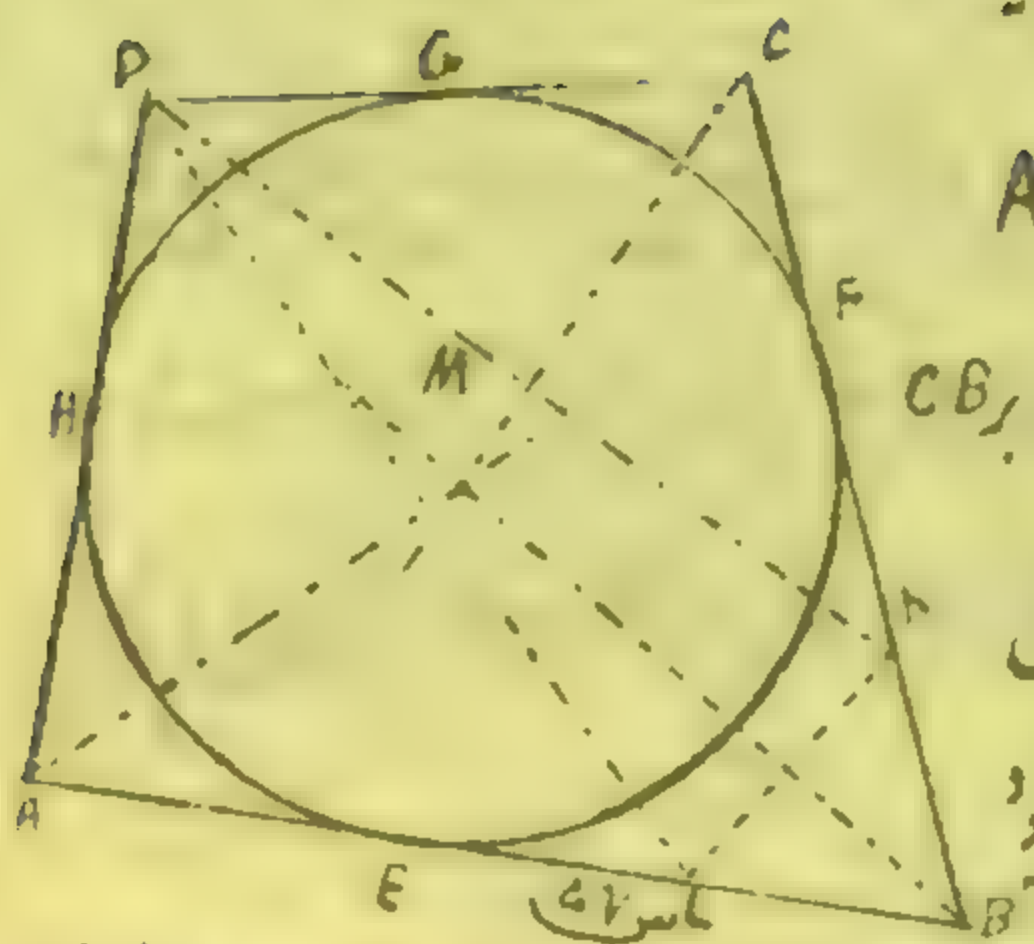
۲۷۷ - قضیه ۲۵ - (عکس) هرگاه در ذواربته اضلاع مجموع دو ضلع متقابل مساوی با مجموع دو ضلع دیگر باشد شکل قابل محیط شدن بر دایره است

$$AB + CD = AD + BC \quad \text{ف - ۵۷}$$

ج - ABCD - ذواربته اضلاعی محیطی است

ب- از تساوی فرض این تساوی نتیجه میشود

$$AB - AD = BC - CD$$



پس چون  $AD$  برابر  $AB$  و  $CD$  برابر  $CB$

نقل نمود دوستانه  $L$  و  $K$  را وصل

نمایم مثلث متساوی الساقین  $DKL$  حاصل میشود

و نیز از وصل  $DL$  و  $DK$  دو مثلث متساوی الساقین  $DAL$  و  $DCK$  بدست میآید و بنا برین

منصفهای سه زاویه  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  عمودهای منصف اضلاع مثلث  $DKL$

خواهند بود (خواص مثلث متساوی الساقین) و لذا هر سه بر یک نقطه مانند  $M$  تقاطع میکنند که

چون متعلق بمنصف الزاویه است از چهار ضلع متساوی الساقه و لهذا مرکز دایره است

که با اضلاع دوار بست اضلاع مماس شود

## تمرینات

۱- بر این احکام ذیل چیت

۱- مستطیل دوار بقدر اضلاعی است محاطی

۲- لونه قابل محیط شدن بر دایره است

۳- خطی که موقع دوار تقاطع مثلث را وصل میکند از مثلث دوار بست اضلاعی



مخاطبی جدا می سازد (ت)

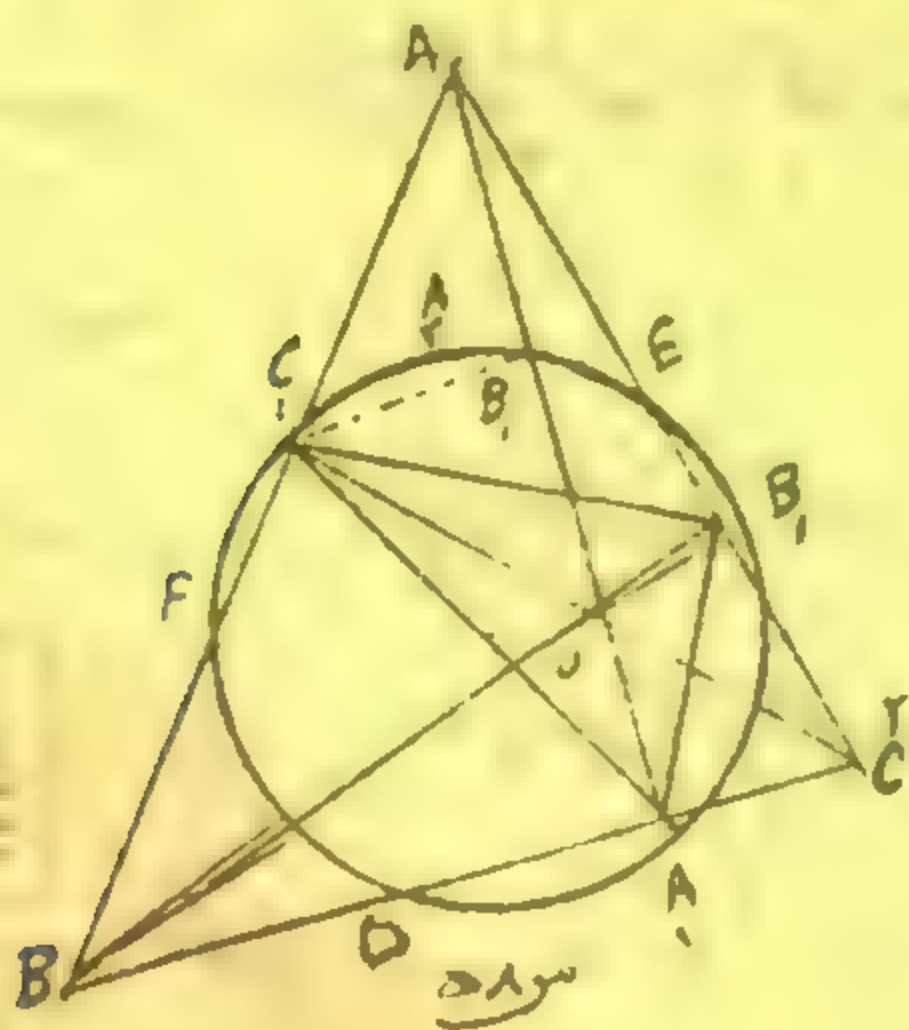
- ۳- در ارتفاع مثلث از ابر در دوار بسته اضلاع مخاطبی مجزای می کنند
- ۵- در ارتفاع بر مثلث مسافت الزاویه ای مثلث دیگری بسته که روش مواضع ارتفاع مثلث اول است (این مثلث را مثلث ارتفاع غیه مثلث اول می نامیم)

۶- دایره محیط مثلث ارتفاعیه اضلاع مثلث و قطعاتی از ارتفاعات را که از میان رأس و نقطه تلاقی در ارتفاع است تصفیف میکند (این دایره را دایره نقطه

یا دایره فویرباخ نامند Feuerbach

طریقه برهان - دوار بعه اضلاع  $AC$  و  $BC$  مخاطبی است (حکم ۴) و مرکز دایره محیطیه اش وسط قطعه  $AD$  یعنی نقطه  $A$  است زیرا  $AD$  باید

قطر دایره باشد



پس  $\widehat{CAA} = 2 \widehat{CAD}$

ولی  $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$

و بحکم  $\widehat{CBD} = \widehat{OBA}$

ولذا  $\widehat{CAA} = \widehat{CBA}$

یعنی نقاط  $A_1$  و  $A_2$  و  $B_1$  و  $B_2$  و  $C_1$  بر محیط یک دایره واقعند (قضیه ۴۲)  
سایر اجزاء از حکم زیر عیناً بهین طریق محقق میشود

ب) مسائل (شعاع دایره محیطه مثلث را  $R$  و اشعه دو دایره مماس را  $r_1$  و

$r_2$  و  $r_3$  و علامت قرار میدهم)  
مسئله ۱- شش از معلومات ذیل رسم کنید

۱-  $a, b, c, r_1, r_2, r_3$  - ۲-  $a, b, c, r_1, r_2, r_3$

۳-  $a, b, c, r_1, r_2, r_3$  - ۴-  $a, b, c, r_1, r_2, r_3$

مسئله ۲- شش از  $a, b, c, r_1, r_2, r_3$  رسم کنید

مسئله ۳- شش از معلومات ذیل رسم کنید

۱-  $a, b, c, r_1, r_2, r_3$  یا  $a, b, c, r_1, r_2, r_3$

مسئله ۴- از شش  $a, b, c, r_1, r_2, r_3$  معلوم است

رسم کنید

مسئله ۵- شش رسم کنید که مواقع سه ارتفاع معلوم است

د- اوضاع نسبی دو دایره

۲۷۱- تعریف ۱- خط الم مرکزین مستقیم است که بین مرکز دو دایره وصل کند



تعریف ۲- دو دایره را مماس کنیم هرگاه بیش از یک نقطه مشترک باشند باشد

تعریف ۳- طرین هر نقطه خط را نسبت به دو نصف آن قرینه بگیریم

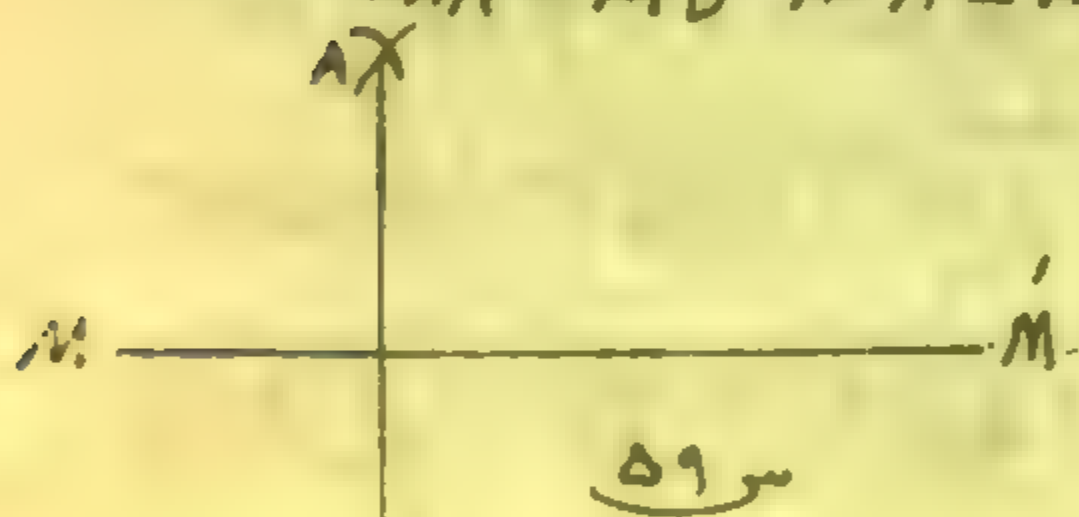
۲۷۹- قضیه ۵۶- هرگاه دو دایره در یک نقطه خارج

خط مرکزین مشترک باشند در نقطه دیگر که قرینه نقطه اول نسبت

بخط مرکزین است نیز مشترک و لذا امتداد طع میشوند

بر آن - چون نقطه B س ۵۶ قرینه نقطه A فرض شد خط مرکزین عمود

منصف AB خواهد بود و لذا  $MA = MB$   $MA' = MB'$



و بنا بر این هر دو دایره از نقطه B

میگذرند و امتداد طع میشوند

فرع - خط مرکزین در دو دایره

مقاطع بر وسط و تر مشترک عمود است (اثبات بوسیله ۱۳ میشود)

۲۸۰- قضیه ۵۷- در دو دایره مماس نقطه تماس بر خط

المرکزین یا امتداد آن است

ب - (خلف) اگر نقطه تماس خارج از خط مرکزین باشد بقضیه فوق

دو دایره متقاطع میشوند و این خلاف فرض است

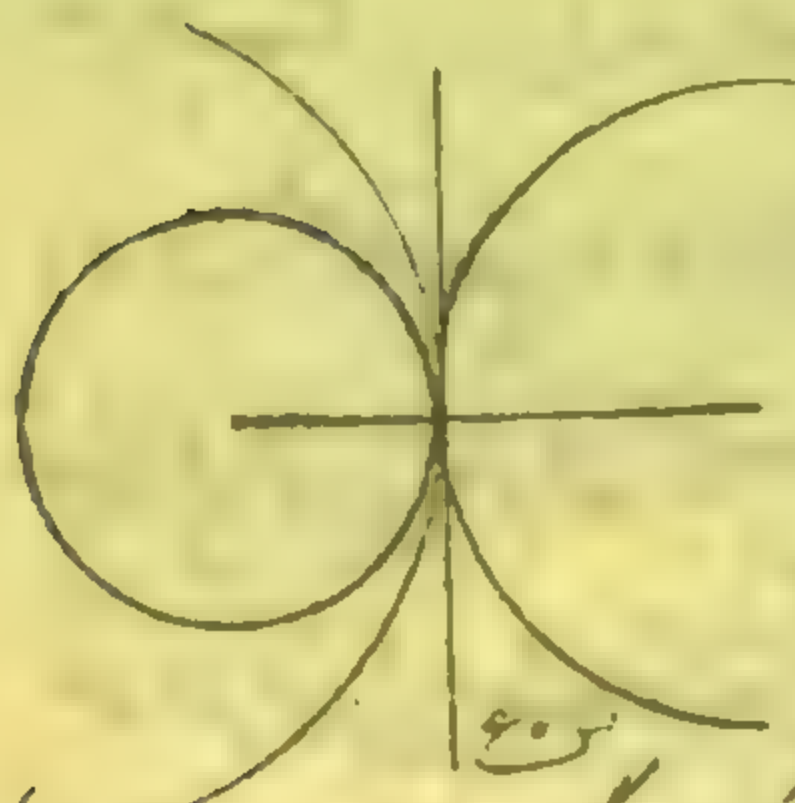
۲۸۱- نتیجه - دو دایره هائس است - هائس مشترکی بر نقطه تماسیست

۲۸۲- فرع - مکان هائی مرکز دو دایره

بر نقطه معینی از دایره هائس باشد

خطی است که بر مرکز دایره و نقطه

مفروضه میگذرد



۲۸۳- تعریف - تماس دایره بدو شکل ممکن است اگر دایره ثانی در خارج دایره

اول باشد دو دایره را هائس خارج و هائس داخل گویند

دو دایره که نه متقاطع و نه هائس باشند یا متخارج و یا متداخل اند یعنی

دایره اول بکلی خارج از دایره ثانی و یا بکلی داخل در آن است

۲۸۴- فرع - اوضاع هائی دو دایره منحصر در پنج وضع است اول

متخارج دوم هائس خارج سوم متقاطع چهارم هائس داخل پنجم

متداخل (اوضاع هفتم مرتباً بدین طریق مستفاد میشود که دو دایره را

که ابتدا متخارج باشند بیکدیگر نزدیک کنیم)

۲۸۵- قضیه ۵۸- اولاً در دو دایره متخارج خط الممرکزین

اطول است از مجموع دو شعاع (زیرا خط الممرکزین علاوه بر مجموع دو شعاع



شامل قطعه است که بین دو دایره واقع شده.

ثانیاً - در دو دایره مماس خارج خط المکرزین مساوی با مجموع

دو شعاع است (زیرا نقطه تماس بر خط المکرزین واقع است)

ثالثاً - در دو دایره متقاطع خط المکرزین اقصر از مجموع و ا طول از

تفاضل دو شعاع است (زیرا چون دو مرکز را یکی از دو نقطه تقاطع

وصل کنیم شش حاصل شود و این حکم در مثل صادق است)

رابعاً - در دو دایره مماس داخل خط المکرزین مساوی با تفاضل

دو شعاع است (زیرا نقطه تماس بر امتداد خط المکرزین واقع است)

خامساً - در دو دایره متداخل خط المکرزین اقصر است از تفاضل

دو شعاع (زیرا تفاضل دو شعاع علاوه بر خط المکرزین شامل قطعه است

که بین دو دایره واقع شده)

ع ۲۸ - قضیه ۵۹ - عکس احکام پنجگانه فوق صحیح است

از این مترار

۱- اگر	$r_1 + r_2 > d$	$r_1$	$r_2$	دو دایره متقاطعند
۲- اگر	$r_1 + r_2 = d$	$r_1$	$r_2$	مماس خارجند

۱- اگر  $r_1 > r_2$  و  $m_1 > m_2$   $\Rightarrow$  متقاطعند

۲- اگر  $r_1 = r_2$  و  $m_1 = m_2$   $\Rightarrow$  مماس در خارج

۵- اگر  $r_1 > r_2$  و  $m_1 < m_2$   $\Rightarrow$  مست در خارج

اثبات این احکام بدلیل خلف است مثلاً وقتی خط المکرزین مساوی مجموع دو باشد با سیجیت از او خارج بچکانه جز مماس خارج مطابقت حاصل نمیشود

### ۵- مماسهای مشترک بر دو دایره

۲۸۷- تعریف - مماس مشترک خطی است که بر دو دایره مماس باشد

اگر بر دو نقطه تماس در یک سمت خط المکرزین واقع شود آن را مماس مشترک خارج

و الا مماس مشترک داخل گویند

۲۸۸- فرض میکنیم  $A A'$  مماس مشترکی بر دو دایره  $(M)$  و  $(M')$

و  $M A$  و  $M' A'$  شعاع دو دایره باشد

که بر دو نقطه تماس وصل شده بر مماس مشترک عمود و لذا متوازی خواهند بود

حال اگر از نقطه  $M$  خط  $M T$  را بمرکز  $A$  رسم کنیم

شکل  $M T A A'$  مستطیل است و بنا بر این

زاویه  $M T M'$  قائمه شده معلوم میگردد که نقطه  $T$  بر محیط دایره است





وضع نسبی آنها بقتدار ذیل است

دو دایره متحد خارج ۲ مماس مشترک خارج ۲ مماس مشترک داخل

== مماس خارج ۲ == == ۱ == ==

== مقاطع ۲ == == ۰ == ==

== مماس داخل ۱ == == ۰ == ==

== متداخل ۰ == == ۰ == ==

عکس قضیه نیز صحیح است مثلاً دو دایره که فقط دو مماس مشترک قبول کنند متقاطعند

و متسعهیندا (اثبات بدلیل خلف میشود) ✕

۲۹۰- مسئله اصلی - میخواهیم مماسهای مشترک دو دایره معین را

رسم کنیم

حل - دایره بقطر خط المکزین رسم نموده از مرکز دایره عظیم با شعاع

$r_1 + r_2$  دو دایره رسم میکنیم و از نقاط  $A$  مشترک بین این

دو دایره و دایره اول مرکز دایره عظیم وصل میکنیم و بالاخره از نقاط

تلاقی این خطوط با دایره عظیم یعنی نقاط  $A$  خطوطی موازات  $MT$  رسم

میکنیم تا مماسهای مشترک مطلوب بدست آیند



عدّه جواهرهای مسدّد موافق وضع دو دایره قسّم معلوم میشود  
 ۲۹۱- تشبیه - وقتی دو دایره متساوی باشند رسم ماسهای خارج که

با خط المکررین موازی میشوند خیلی سهل است

۲۹۲- قضیه ۱۶ - دو ماس مشترک خارج متساویند

و کذا لک دو ماس مشترک داخل

طریقه برهان - کافی است قطعاتی از دو ماس را که بین تقاطعشان

و دو نقطه ماس واقعند جمع یا قسّم بکنیم

۲۹۳- فرع - قطعه خطی که ماس خارج یا داخل از ماس داخل <sup>باج</sup> خارج

جدا میکند با ماس خارج یا داخل مساوی است

طریقه برهان - بوسید قاء و تبدیل قسمتهای ماس داخل مقیمتهای

ماس خارج و بالعکس حکم ثابت میشود

## تمرینات

مسئله ۱ - میخواهیم دایره رسم کنیم که بر نقطه  $A$  با دایره  $(M - r)$  مماس

شده و بر نقطه  $B$  که در داخل یا خارج دایره معترض واقعه بگذرد

حل - چون  $AB$  وترى از دایره مطلوبه است مرکز آن نقطه تقاطع عمود <sup>منصفه</sup>

این خط با شعاع  $MA$  خواهد بود (مرکزه نقطه  $B$  بر ماسی که بر نقطه  $A$  از دایره منفرجه رسم شود واقع گردد مسئله محال است)

مسئله ۲ - دایره شعاع منفرجه  $MA$  رسم کنید که با دایره  $(P, r)$  مماس شود و بر نقطه منفرجه  $A$  بگذرد

طریقه حل - دایره  $(P, r + R)$  بر مرکز دایره مطلوبه مرور میکند بحث اگر  $P$  که کوچکتر از  $P$  باشد ممکن است نقطه  $A$  را در داخل دایره  $(P, r + R)$  نیز منفرجه کرد اما در این صورت مرکز دایره مطلوبه محیط دایره  $(P, r - R)$  واقع میشود مسئله ۳ - میخواهیم دایره شعاع  $MA$  رسم کنید که با دایره بیرونی  $(P, R)$  مماس شود

ملاحظه - شعاع منفرجه  $MA$  در موافق چهار حالت ممکنه ذیل تابع بعضی شرایط است که باید تحقیق نمود

اولا - باید دایره مطلوبه بر دو دایره را از خارج تماس کند

ثانیا -  $\text{==}$   $\text{==}$   $\text{==}$   $\text{==}$  داخل تماس کند

ثالثا -  $\text{==}$  با دایره اول تماس داخل و با دوم تماس خارج شود

رابعا - باید دایره مطلوبه با دایره دوم تماس داخل و با دایره اول تماس خارج گردد



مسئله ۴ - دایره بشاع هر رسم کنید با دایره (ر و م) و خط

$AB$  مماس شود (شرط امکان مسند صحت)

مسئله ۵ - دایره رسم کنید که با خط  $AB$  و نقطه  $C$  از دایره (ر و م) مماس شود.

طریقه حل - مماس مشترک بر دو دایره خط  $AB$  را قطع میکند و بدین وسیله میتوان

نقطه تماس را بر خط  $AB$  بدست آورد

مسئله ۶ - دو دایره مماس طع مفروض است بخوابسیم بر یکی از دو نقطه تقاطع

قاطعی چنان مرور دهیم که مجموع دو وتر حاصل بطول معین باشد

طریقه حل - دو عمودیکه از دو مرکز بر قاطع مطلوب فرود آیند با تمام خطیکه از یکی از

دو مرکز موازات قاطع رسم شود و سید تعیین مثلثی قائم الزاویه میشود که وترش

خط المکرزین و یک ضلعش نصف باشد (پس شرط امکان مسندیت  $\frac{1}{2} > \frac{r}{R}$ )

مسئله ۷ - بر دایره (ر و م) مماسی رسم کنید که فاصله آن از دو نقطه مفروضه

$A$  و  $B$  اولاً متساوی باشد - ثانیاً مجموعاً طول معلوم شود - ثالثاً تقاطعشان طول معینی باشد

طریقه حل - بناسبت احکام راجعه بخاتم میان دو زلفت و فاصله بین

دو نقطه آن سوال دوم و سوم راجع ترسیم مماس مشترکی بر دو دایره

معلوم میگردد

# کتاب سوم

## مباحث اشکال مستقيمة المخط و تناسب اشکال

### فصل اول

#### ۱- مباحث مستطیل و مربع

۲۹۴- تعریف ۱- قسمتی از سطح را که در درون شکلی واقع و محیط آن محدود است

وسعت آن شکل نامند

۲۹۵- تعریف ۲- دو شکل را معادل یا متعادل گویند هرگاه

از حیث وسعت یکسان باشند

۲۹۶- فرع ۱- دو شکل متساوی متعادلند مثلاً جمیع مثلثات متساویه یا

دو ایرکد یک شاع باشند اشکال متعادل همیشه باشند

۲۹۷- فرع ۲- دو شکل که از جمیع یا قسمی اشکال متساویه حاصل شده باشند

متعادلد و لواینکه متساوی نباشند

۲۹۸- تعریف ۲- واحد سطح مربعی است که ضلعش واحد طول باشد مثلاً مربع

اینکه واحد طول ذرع یا متر فرض شود واحد سطح ذرع مربع یا متر



مربع خواهد بود

۲۹۹- تعریف ۲- هرگاه وسعت شکلی  $n$  برابر واحد سطح باشد

عدد  $n$  را مساحت آن شکل گویند

۳۰۰- تنبیه- سنجیدن مساحت اشکال بر این مندرج است که خطوط <sup>نقطه</sup>

توان بعد تقبیر نمود یعنی توان نسبت ابعاد شکل را با واحد سنجید و باین

وقتی که مساحت از حاصل ضرب دو خط کف شود باید مقفیت بود که مقصود

حاصل ضرب اعدادی است که اندازه آن دو خط باشند

۳۰۱- قضیه ۲- مساحت مستطیل مساویست با حاصل ضرب

دو ضلع مجاور آن که معمولاً یکی را قاعده و دیگری را

ارتفاع گویند

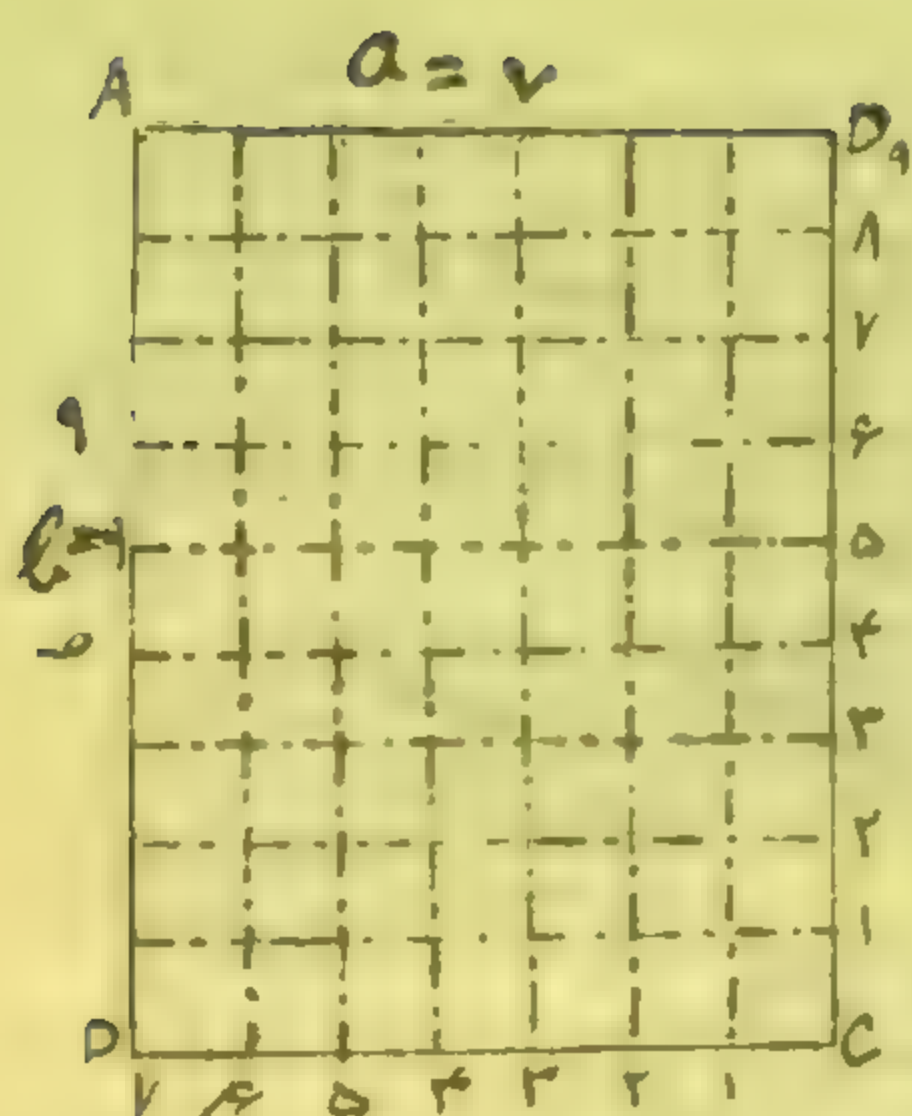
برهان- اولاً فرض میکنیم  $a$  و  $b$  که اندازه دو ضلع مجاورند عدد صحیح

باشند پس اگر  $AB$  را  $a$  و  $BC$  را  $b$  فرض کنیم

هر جزو یک واحد طول است چون از نقاط تقسیم  $AB$  خطوطی موازی با  $BC$

رسم کنیم مستطیل مفروض بر  $a$  مستطیل متساوی منقسم میشود حال چون از

نقاط تقسیم  $BC$  نیز خطوطی موازی با  $AB$  رسم کنیم هر مستطیل جزو



به سطح مربع متناهی که هر کدام یک واحد  
سطح است مجزای میگردد و بنا بر این سطح  
مفروض شامل  $a$  برابر  $a$  یعنی  $a \times a$   
مربع خواهد بود پس در این حالت

$$s = a \times a$$

ثانیا فرض میکنیم  $a$  و  $b$  یا یکی از آن دو کسری باشد بعد از تجزیه هر دو در یک

مخرج تحول نموده فرض میکنیم  $a = \frac{m}{n}$  و  $b = \frac{m'}{n}$  حال اگر  $\frac{1}{n}$

واحد را واحد طول قرار دهیم اندازه  $a$  و  $b$  دو عدد صحیح  $m$

و  $m'$  و اندازه ضلع واحد سطح عدد صحیح  $n$  میشود پس موافق آنچه از اثبات

نموده ایم بحسب واحد جدید مساحت مستطیل  $m \times m'$  و مساحت واحد اصلی

سطح  $n^2$  خواهد بود و از اینجا معلوم میشود که مساحت مستطیل مفروض

$$\frac{m \cdot m'}{n \cdot n}$$

برابر واحد اصلی سطح است

$$s = \frac{m \cdot m'}{n \cdot n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n} = a \cdot b$$

ثانیا در صورتیکه اضلاع مستطیل اضم باشند چون قضیه برای جمع مقادیر تقریبی

آنها بطریق فوق محقق میشود در این حالت نیز محقق است



۳۰۲ - نتیجه ۱ - مساحت مربعی که ضلعش  $a$  باشد مساوی  $a^2$  باشد

یعنی  $a^2$  خواهد بود و همین نسبت است که محدور عدد در این آن نیز گویند

۳۰۳ - نتیجه ۲ - حاصل ضرب دو خط را بواسطه مستطیلی که دو خط معروف <sup>عدد</sup>

و ارتفاع آن باشند میانیم در این صورت حاصل ضرب به مساحت مرسوم شود

## مربعات

مقدار  $a^2$  می شود که مجموع یا تفاضل دو مستطیل که در یک بعد مشترک باشند مستطیل دیگر است که در همان بعد با دو مستطیل مفروض شارک است

مسئله ۱ - تحت تساوی ذیل را بواسطه ترسیم تحقیق کنید

$$a^2 \pm ac = a(a \pm c)$$

مسئله ۲ - بخواهیم بسید ترسیم تساوی ذیل را برهن کنید

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

مسئله ۳ - تحت تساوی ذیل را برسیم توضیح کنید

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

مسئله ۴ - چگونه برسیم ثابت میشود که مجموع دو عدد تفاضشان مساوی تفاضل

دو مربع آنهاست یعنی  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

مسئله ۵ - تاوهای ذیل را بر حسب توابع و مبرهن کنید

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd - 1$$

$$(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd - 2$$

$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd - 3$$

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) - 4$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab - 5$$

ب - مساحت متوازی الاضلاع و ذوزنقه و شیر الاضلاع

۳۰۴ - تعریف - فاصله دو ضلع متوازی الاضلاع را ارتفاع و هر یک از

این دو ضلع را قاعده نامند

۳۰۵ - فرع ۱ - هر متوازی الاضلاع ارتفاع دارد

۳۰۶ - فرع ۲ - هرگاه قاعده های دو متوازی الاضلاع متحد الارتفاع بر یک خط

مستقیم قرار گرفته باشند دو ضلع مقابل قاعده ها نیز بر امتداد خطی موازی با خط اول واقع

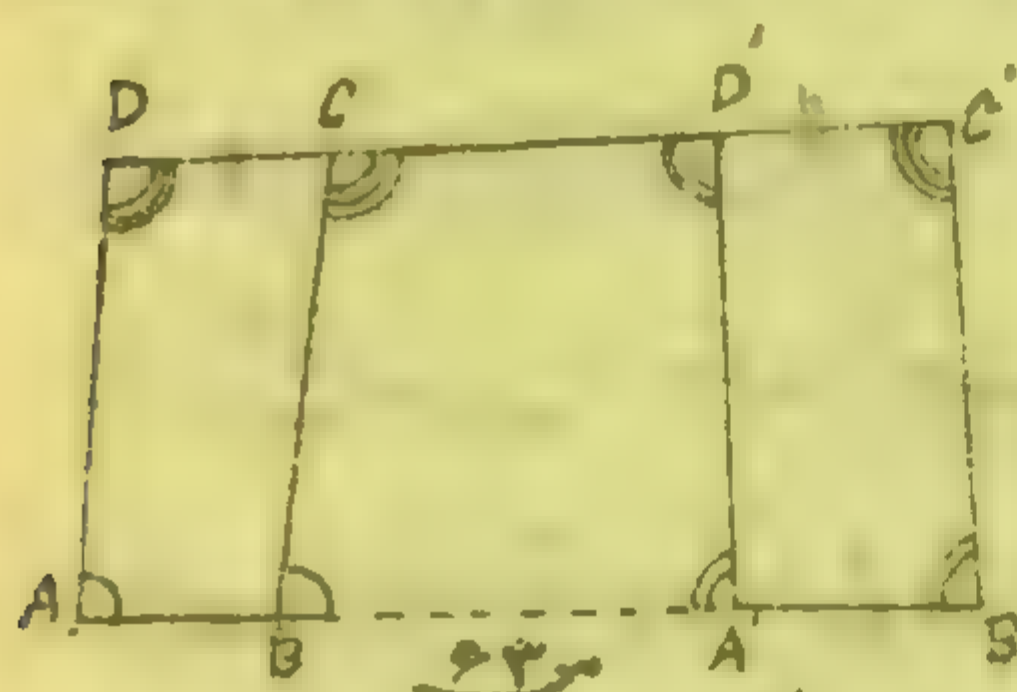
میشوند ( زیرا فاصله دو خط متوازی همه مجابک انداز است )

۳۰۷ - قضیه ۱ - دو متوازی الاضلاع که در قاعده و ارتفاع

متساوی باشند معادند



برهان - متوازی الاضلاع  $A'B'C'D'$  راست بطوری قرار می دهیم  
که  $A'B'$  بر  $AB$  افتد و  $CD'$  موازی  $AB$  قرار گیرد و بوجه  $CD$  نیز بر افتد  
 $CD$  واقع شود و دوزنفت  $A'A'D'D$  و  $B'B'C'C$  حاصل  
سکردد.



در این دو شکل از طرفی  $\hat{A} = \hat{B}$

و  $\hat{A} = \hat{B}$  و  $\hat{D} = \hat{C}$  و  $\hat{D} = \hat{C}$

(زوایای متقابل داخل و خارج) و از طرف دیگر  $A'A = B'B$  (چرا)  
و  $AD = BC$  و  $DD' = CC'$  و  $AD' = BC'$  پس دوزنفت متساویند

حال چون از شکل  $ADCB$  یک مرتبه دوزنفت  $A'A'D'D$  و از  
یک مرتبه دوزنفت  $B'B'C'C$  را نقصان کنیم البته دو باقی مانده که دو متوازی الاضلاع  
مفروضند معادل می شوند زیرا از هر دو یک ضلع و دو ضلع دیگر متساوی باشند  
۳۰۸ - نتیجه ۱ - هر متوازی الاضلاع معادل مستطیلی است که بر همان

قاعده و ارتفاع باشد

۳۰۹ - نتیجه ۲ - مساحت متوازی الاضلاع مساوی با حاصل ضرب

قاعده و ارتفاع است

۲۱۰ - فرع - دو متوازی الاضلاع مساوی که در قاعده (یا ارتفاع) متساوی

باشند در ارتفاع (یا قاعده) منبسط می‌شوند

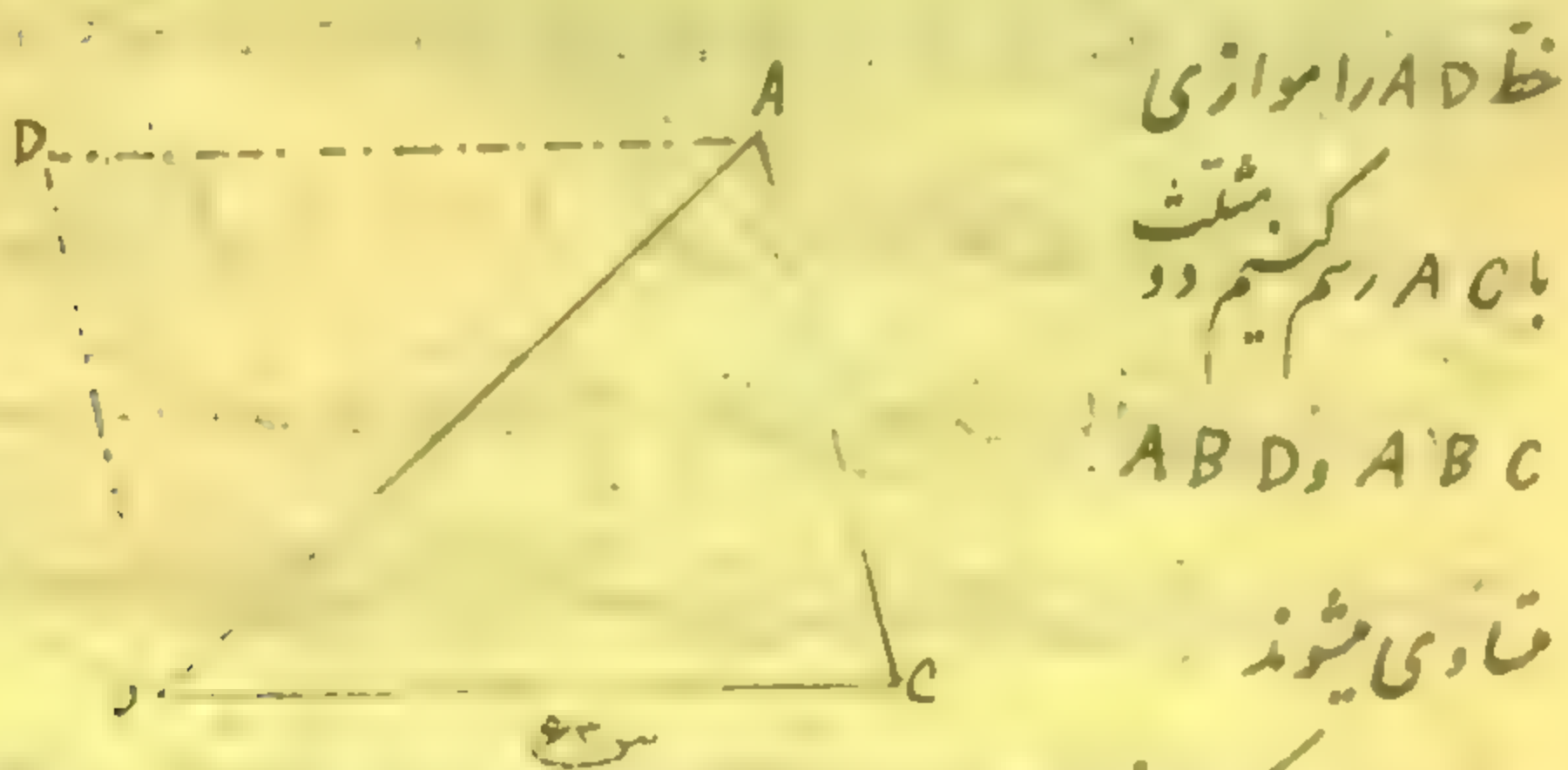
دلیل این حکم را هم بطریق خلف دهم بودیم و مستند مساوی یک مقدار

می‌توان ذکر کرد که از تساوی  $ax = ax$  نتیجه می‌شود

۲ - قضیه ۴ - هر مثلث نصف متوازی الاضلاع است

که قاعده اش قاعده مثلث و ارتفاعش ارتفاع آن باشد

زیرا چون از رأس  $B$  بسطح  $AC$  را بوزنات  $BD$  و از رأس  $A$



خط  $AD$  را موازی

کن مثلث  $ABC$  را هم تقسیم دو

$ABD$  و  $ABC$

مساوی می‌شوند

و بنا بر این هر یک نصف

متوازی الاضلاع  $ADBC$  که بر قاعده و ارتفاع مثلث  $ABC$  است

خواهند بود

۲۱۲ - نتیجه ۱ - مساحت مثلث نصف حاصل ضرب ارتفاع در



نظیر همان ضلع است

$$s = \frac{1}{4} a h_a = \frac{1}{4} b h_b = \frac{1}{4} c h_c$$

۳۱۳ - نتیجہ ۲ - مثلثاتیکه در قاعده و ارتفاع مساوی باشند معادله

۳۱۴ - فرع ۱ - در دو مثلث معادل که قاعده آنها مشترک باشد در سر مقابل

قاعده بر خطی موازی آن واقع میشود

فرع ۲ - هرگاه یک ضلع مثلث را بر  $n$  جزء مساوی منقسم ساختیم نقاط

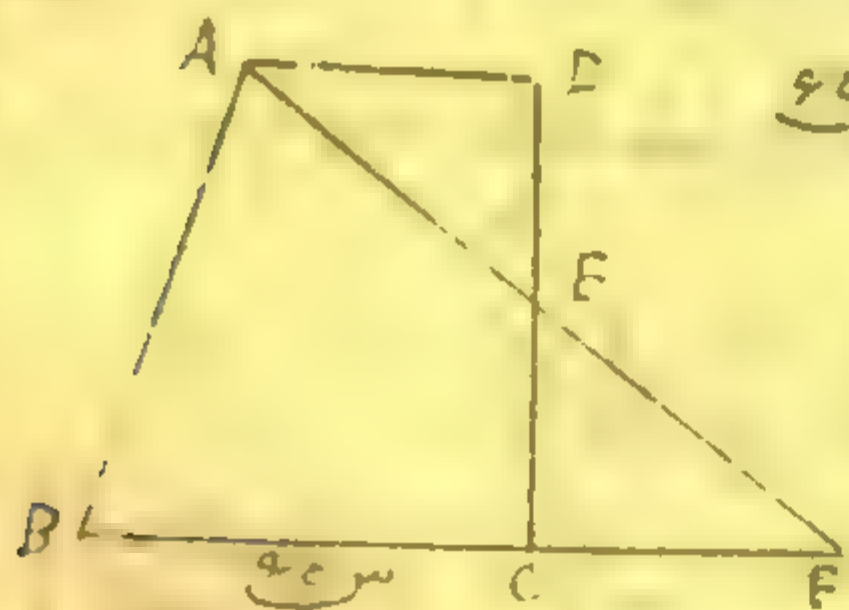
تقسیم را بر رأس وصل کنیم آن مثلث بر  $n$  مثلث متعادل منقسم میگردد

۳۱۵ - تعریف - ارتفاع ذوزنقه عبارتست از فاصله دو ضلع متوازی

که آنها را دو قاعده ذوزنقه نامند

۳۱۶ - قضیه ۶۷ - هر دو ذوزنقه معادلت با مثلثی که ارتفاعش

ارتفاع ذوزنقه و قاعده اش مجموع دو قاعده ذوزنقه باشد



بر همان - نقطه A را بواسطه ضلع DC سه ۶۵

وصل نموده است و می بینیم تا است قاعده

BC را بر نقطه F قطع کند فورا ملاحظه شود

که دو مثلث AED و CEF متساوی (رض ز) پس اگر بجای مثلث ADE

$FCE$  را قرار دهیم و سمت شکل تغییر نگیرد و دوزنقت  $ABCD$  مثلث  
 $ABF$  مبدل میشود اما چون در این مثلث ضلع  $BF$  را قاعده فرض کنیم دیده  
 میشود که ارتفاع مثلث همان ارتفاع ذوزنقه است و قاعده آن  $BF$   
 مرکبت از دو جزو  $BC$  و  $CF$  که حسب دثانی مساوی با  $AD$  است و

$$BF = BC + AD \text{ لهذا}$$

۳۱۷- نتیجه - مساحت ذوزنقه مساوی است با نصف حاصل

ضرب مجموع قاعده در ارتفاع

$$s = \frac{h(a+b)}{2}$$

۳۱۸- بجهت مساحت کردن کثیرالاضلاع از امثلثات فقط یا بجهت مثلث و چند ذوزنقه

مجزئی و مرکب ایجاد مساحت نموده مساحت را جمع میکنیم پس فرغ ذیل محقق است  
 فرغ - مساحت کثیرالاضلاع را وقتی میتوان تعیین داشت که شکل مثلثات و ذوزنقهها

تجزیه شده و قواعد و ارتفاعات این اشکال معین باشد (رجوع به ساح)

۳۱۹- فرغ - اگر  $s$   $s$   $s$   $s$   $s$  اشعه دوایر محاطیه مثلث و  $2r$

محیط آن باشد چهار رابطه ذیل برای مساحت مثلث برقرار است

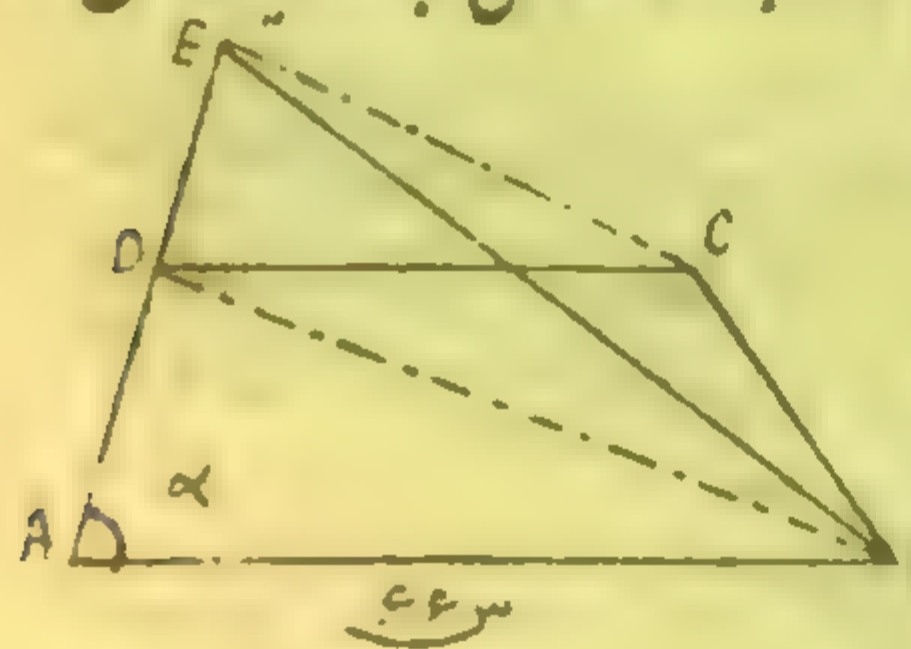
$$1 - r \cdot s = s - 2r - a(r - a) = s$$



۳- (ح - ح) پر  $\rho = \rho - 4 - (c - ح) = \rho - 4$   
 طریقه بر ثان - در هر حال از وصل مرکز دایره بر دوش مثلث مفروض مثلث  
 حاصل میشود که از ترکیب آنها جمیع و تفریق مثلث مفروض بدست میآید

۳۲۰- تعریف - مقصود از تبدیل شکل یا فن شکلیت معادل باشد شکل مفروض که  
 از حیث صورت با آن مختلف باشد

۳۲۱- مسئله - میخواهیم دوار بقه الاصلای را با حفظ یک ضلع و یک



زاویه مجاور آن مثلثی تبدیل کنیم

حل - چون ضلع AB و زاویه α

موجود محفوظ است لازم میآید

رأس سوم مثلث مطلوب نقطه E بر استقامت AD واقع گردد ولی برای تعادل

مثلث و دوار بقه الاصلای لازم است که دو مثلث BDE و BDC متعادل باشند

و چون این دو مثلث در قاعده BD مشترکند باید در رأس C و D بر خطی

موازی با BD واقع باشند و از اینجا ترسیم ذیل استنباط میشود

رسم - قطر BD را وصل نمود از نقطه C خطی موازی است آن مرور دیم

تا امتداد AD را در نقطه E قطع کند و EB را وصل میکنیم EAB مثلث مطلوب

# تقریبات

اولاً — مطلوب است بر این احکام ذیل

حکم ۱ — هرگاه در دو مثلث دو ضلع نظیر نظیر مساوی و زاویه بین آنها مثل باشند مثلث

متساویند (باید تمامای دوار تنصاع را ثابت کرد)

حکم ۲ — قسمت عظمیه میانه مثلث را به مثلث متساویان تجزیه میکنند

حکم ۳ — چون در دو زوینته وسطی یکی از دو ساق را به دو انتهای دیگری وصل کنیم

مثلثی متساوی نصف دو زوینته بدست میاید

حکم ۴ — متوازی الاضلاعی که ریشش اوسط اضلاع دوار بعه اضلاعی باشد

مساوی نصف آن دوار بعه اضلاع است

ثانیاً — سائل ذیل را حل کنید

x مسئله ۱ — متوازی الاضلاع را با حفظ یک ضلع (یعنی یک ضلع آن تغییر نکند)

اولاً مستطیل ثانیاً به لوزی تبدیل نمایند

مسئله ۲ — مثلثی را با حفظ یک ضلع یکی از اشکال ذیل تبدیل نماید ۱ — مثلث متساوی الساقین

۲ — مثلث قائم الزاویه ۳ — مثلثی که زاویه مقابل ضلع محفوظ مساوی زاویه ۹۰ باشد

مسئله ۳ — میخوامیم دو زوینته را مستطیل تبدیل کنیم

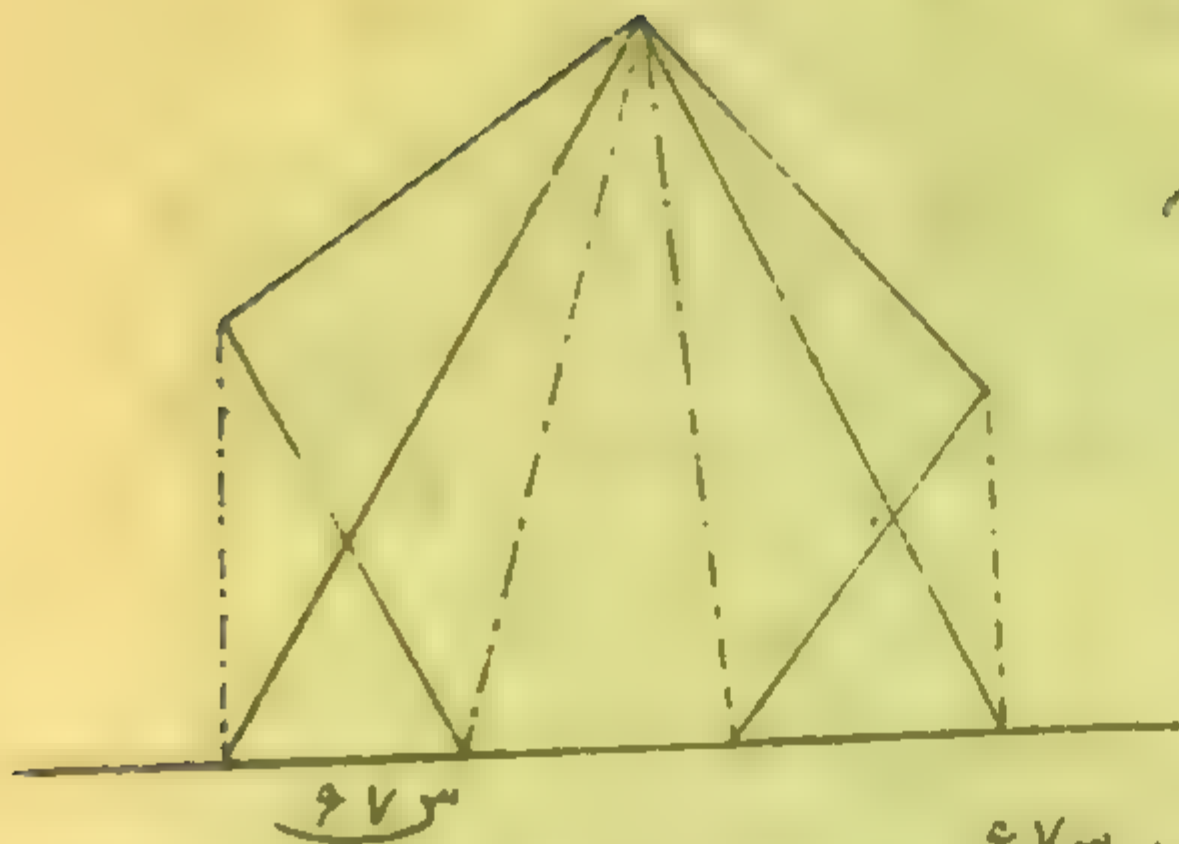


مسئله ۴ - کثیر الاضلاعی

ضلعی را با کثیر الاضلاع

ضلعی تبدیل کنید

مسئله ۵ - کثیر الاضلاعی



ضلعی را بثلث تبدیل نماید

مسئله ۶ - مثلثی را با حفظ یک زاویه مثلثی دیگر تبدیل کنید که یک ضلع آن زاویه

بطول معینی باشد

مسئله ۷ - مثلثی را با حفظ یک زاویه مثلثی دیگر تبدیل کنید که ارتفاع دارد

بر یکی از دو ضلع آن زاویه بطول معینی باشد

مسئله ۸ - متوازی الاضلاعی را با حفظ یک زاویه متوازی الاضلاع دیگری

تبدیل کنید که یک ضلعش بطول معینی باشد

مسئله ۹ - مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید

۱ -  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$

۳ -  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$

۵ -  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$

$$۷- \text{و} \text{ و } p-a \text{ و } p-a \text{ و } ۱- \text{و} \text{ و } p-c \text{ و } p-c$$

$$۹- \text{و} \text{ و } p-a \text{ و } p-a \text{ و } ۱۰- \text{و} \text{ و } p-a \text{ و } p-a$$

طریقه حل - در هر یک از حالات فوق بالاخره بسند راجع به رسم هاشم مشترک

بر دو دایره معلوم میگردد

ج - تعادل متوازی الاضلاع در قاعده و ارتفاع مشترک نیستند

۳۲۲ - قضیه ۶۶ - چون از نقطه مفروضه بر قطر متوازی الاضلاع

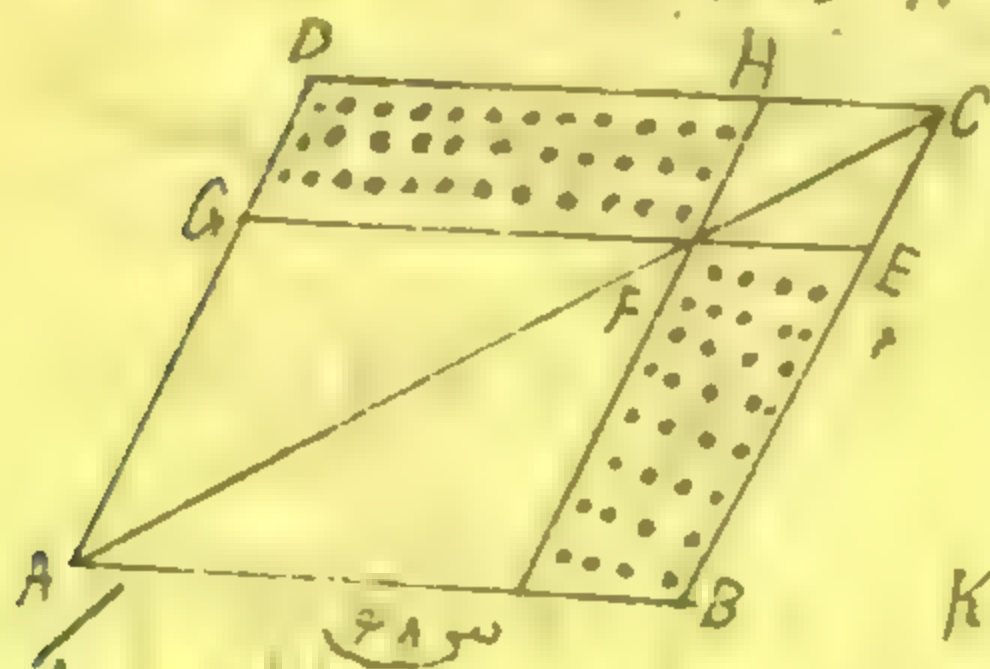
دو موازی با اضلاع آن رسم نمایم چهار متوازی الاضلاع حاصل میگردد

که از آنها دو شکلی که شامل قطر مفروضه نیستند معادلند

$$\Delta ABC = ADC \quad (۱) \quad \text{سواء}$$

$$\Delta AKF = AFG \quad (۲)$$

$$\Delta EFC = FCH \quad (۳)$$



چون رابطه (۲) و (۳) را

از رابطه (۱) تفسیر کنیم

معلوم میشود که  $KBEF = GDHF$

۳۲۲ - نتیجه ۱ - دو متوازی الاضلاع  $ADHK$  و  $ABEG$  بهیچانکه



نیز مساوی  $C D G E$   $C B K H$

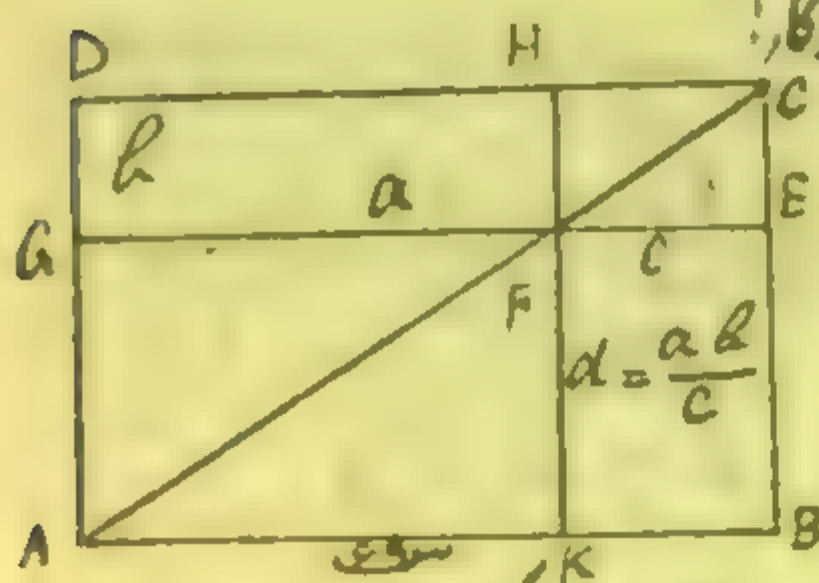
۳۲۴ - نتیجه ۲ - هرگاه شکل اصلی مستطیل باشد شکل حاصل مستطیل خواهد بود.

پس  $a \cdot b = c \cdot d$

یا  $d = \frac{a \cdot b}{c}$

۳۲۵ - فرع - خارج قسمت  $\frac{a \cdot b}{c}$  قاعده مستطیلی معادل  $a \cdot b$  که ارتفاع باشد  $c$ .

و برای یافتن آن بطریق هندسی وسیله ذیل درگاه:



و ضلع مقابل مستطیل  $a \cdot b$  را با اندازه  $c$

امتداد داده شکل را مانند شکل سابق

تمام میکنیم بتمی که یک رأس مستطیل  $a \cdot b$  بر قطر و قعر شود چنانکه در شکل ۹۹ نمودار شده

۳۲۶ - تعریف - موقع عمود ویرا که از نقطه مسند فرضه برستقیم مفروض فرود آید تصویر

آن نقطه گوئیم و چون از طرفین قطعه خطی دو عمود برستیمی فرود آوریم قسمتی از برستقیم مفروض را که مابین دو موقع دو عمود واقع میشود تصویر قطعه مفروضه گوئیم و در این صورت برستقیم مفروض را

محور تصویر یا بالاختصار محور خوانیم

۳۲۷ - فرع - هرگاه دو ضلع زاویه را بر یکدیگر تصویر کنیم اگر زاویه حادثه است انتهایی

دو تصویر بر ضلع زاویه واقع میشود و اگر زاویه منفرجه باشد دو انتها بر امتداد ضلع

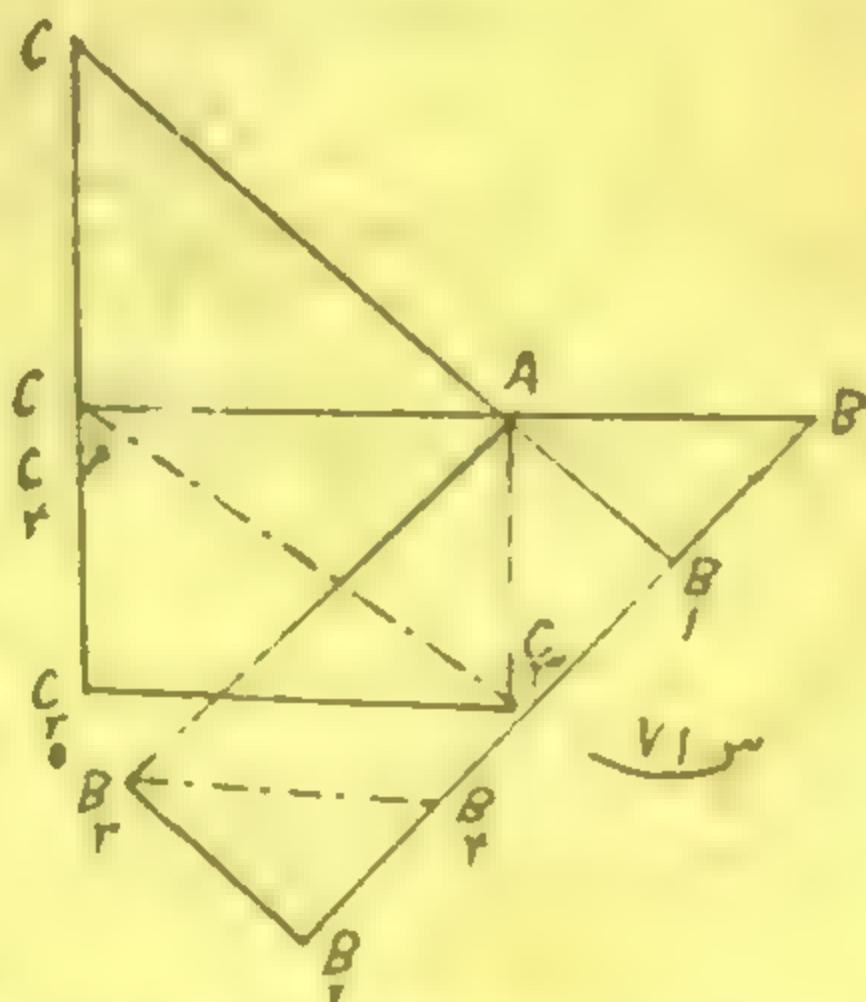
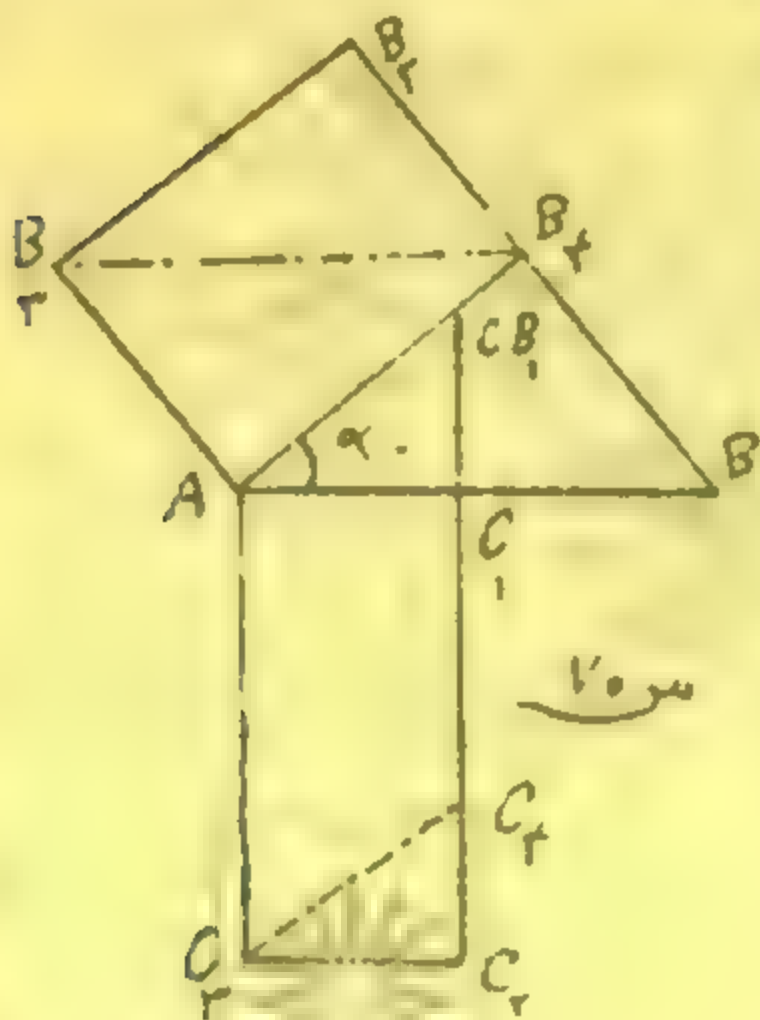
۳۲۸ - قضیه ۷۶ - هرگاه دو ضلع محدود زاویه را بر یکدیگر  
تصویر نموده بر هر یک مستطیلی طرح کنیم که بعد و عرض تصویر ضلع دیگر  
باشد دو مستطیل مرسوم معادل خواهند بود (قضیه تصویری)

فرض کنیم دو ضلع زاویه  $A$  بدو نقطه  $B$  و  $C$  محدود باشد عمود  $BB$  را  
بر  $AC$  فرود آورده تا نقطه  $B_1$  با اندازه  $AC$  متداود داده  $BB_1$  مستطیل

$ABB_1B_2$  را (مساحت  $AB \times AC$ ) تمام کنیم و همین طریق مستطیل  
 $ACC_1C_2$  را (مساحت  $AC \times AB$ ) رسم نموده گوئیم

$$AB \times AC = AC \times AB$$

برهان -  $BB_1B_2$  را موازات  $AB$  و  $C_1C_2$  را موازات  $AC$  رسم کنیم



دو متوازی الاضلاع  $ABB_1B_2$  و  $ACC_1C_2$  متساوی الاضلاع  $AB$

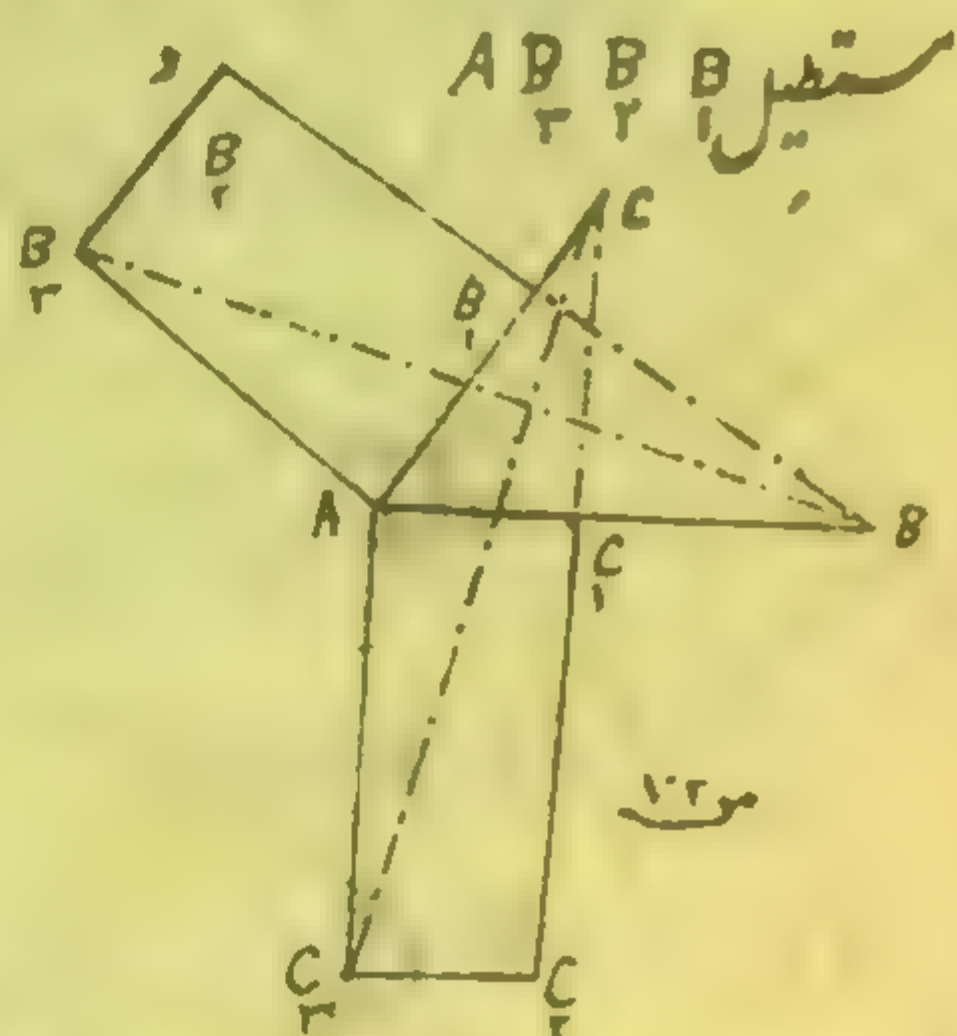
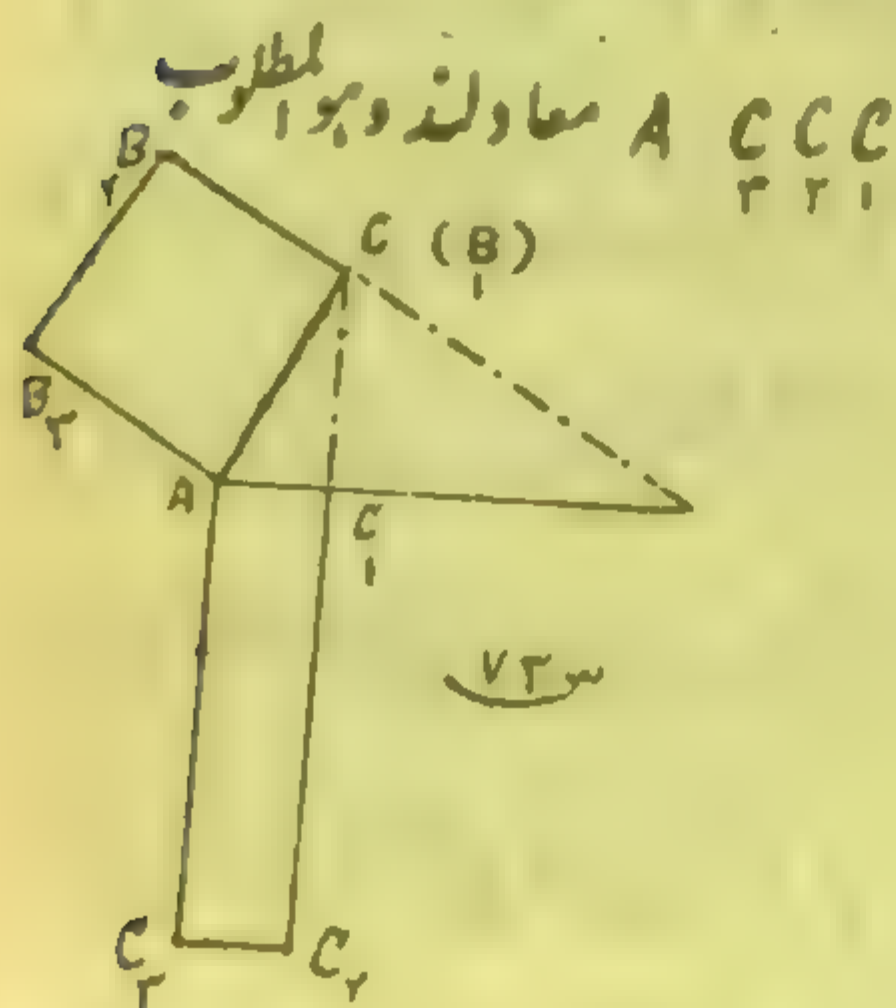


ترتیب یا وضع  $A C$  و  $A C$  متساوی و زاویه  $B A B$  با  $B A C$

مساویست (چونکه هر کدام عمود یک زاویه قائمه و یک جزو مشترک دارند) اما

متوازی الاضلاع  $A B B B$  معادست با مستطین  $A B B B$  (بجای)

متوازی الاضلاع  $A C C C$  با مستطین  $A C C C$  معادست پس



اگر دو خط  $B B$  و  $C C$  را در اصل نمایم طبقه دیگر برای بران بدست میاید از این نظر

$$\text{در صورت } \triangle A B B = \triangle A C C \quad (\text{من ز من})$$

$$\text{لیکن } \triangle A B B = \frac{A B_1 B_2 B_3}{2} \quad (\text{ق ۴})$$

$$\text{و } \triangle A C C = \frac{A C_1 C_2 C_3}{2} \quad (\text{ق ۴})$$

و چون نمی از دو مستطین معادل شده تعادل دو مستطین واضح است

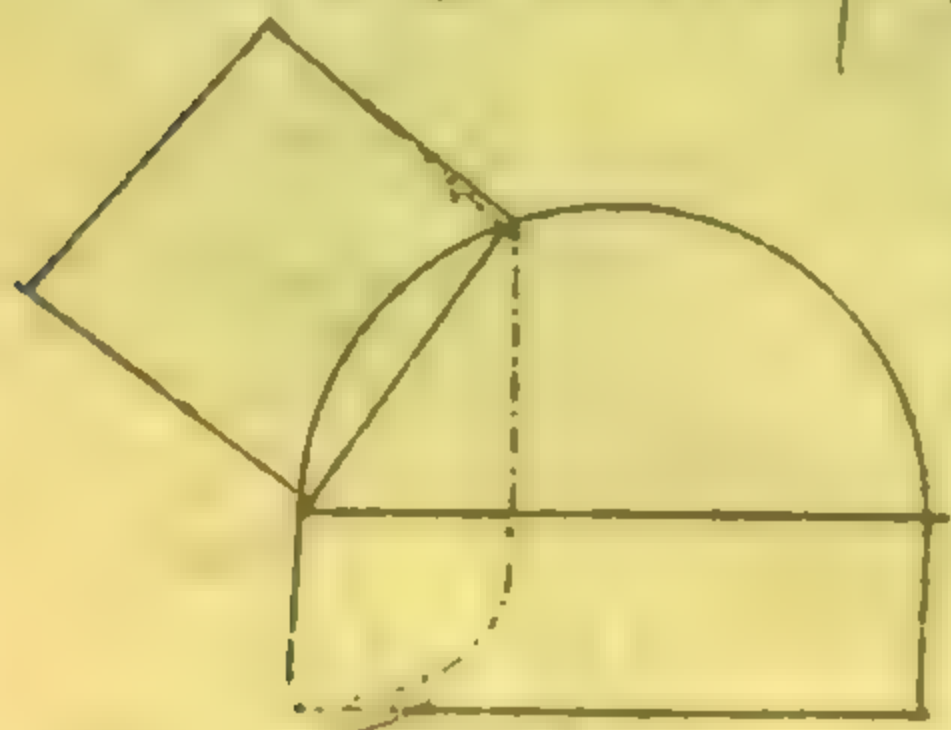
۳۳۹- اگر زاویه  $A C B$  قائمه باشد نقطه  $C$  با  $B$  ششبه مستطین تبدیل مربع وضع  $A C$  میگردد

و از اینجا نتیجه فتم ذیل بدست میاید

نتیجه - مربع هر ضلع از مثلث قائم الزاویه معادل است با سطحی که  
قاعده اش وتر و ارتفاعش تصویر آن ضلع بر وتر باشد

یعنی  $BC = AB \times BC$  و  $AC = AB \times AC$

۳۳۰ - مسئله اصلی - میخواهیم مستطیلی را مربع تبدیل کنیم  
حل - نیم دایره نقطه بر ضلع اطول رسم نموده آنوقت ضلع قصرا بر ضلع طول  
نقل کرد و از منتهای عمود منتهای بر قطر خارج.



میکنیم و نقطه تقاطع این عمود را با دایره  
با منتهای مشترک دو ضلع وصل میکنیم

خط واصل ضلع مربع مطلوب است (بج دلیل)

## مزیات

مسئله ۱ - میخواهیم مربعی از ضلع معادل  $\frac{1}{2}$  ثانی معادل  $\frac{1}{2}$  ثانی معادل  $\frac{1}{2}$

مربع معادل رسم کنیم

مسئله ۲ - میخواهیم مربعی را به مستطیلی تبدیل کنیم که یک ضلعش بطول  $\frac{1}{2}$  باشد

طریقه حل - اگر خط  $\frac{1}{2}$  بزرگتر از  $\frac{1}{2}$  که ضلع مربع است باشد نیم دایره نقطه

صح و الا نیم دایره بر صوم نقطه  $\frac{1}{2}$  و سید حل شد میشود



مسئله ۳ - میخواسیم مثلثی را بر تنجی تبدیل کنیم

مسئله ۴ - مرتبی را بر تنجی مساوی آنرا قیاسی کنیم که قاعده  $a$  یا  $a'$  باشد

مسئله ۵ - میخواسیم دوزنقه را بر تنجی تبدیل کنیم

## د - قضیه فیثاغورث و سیاحت آن

۳۳۱ - قضیه ۸ - در مثلث قائم الزاویه مربع وتر مساوی

با مجموع مربعین دو ضلع دیگر (این قضیه در نزد ما بقضیه عروس معروف است)

برهان - زیرا چنانکه از نتیجه ۲۲۹ معلوم میشود  $AC^2 = AB \cdot AC$

و  $BC^2 = AB \cdot BC$  (رجوع به ص ۷۲) از جمع این دو تساوی حاصل میشود

$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AC + AB \cdot BC = AB(AC + BC) = AB^2$  <sup>مطلوب</sup>

۳۳۲ - نتیجه - مربع هر ضلع زاویه قائمه مساوی است با فضل مربع وتر بر مربع

ضلع دیگر ( $a^2 = c^2 - b^2$  و  $a'^2 = c^2 - b'^2$ )

۳۳۳ - فرع - هرگاه دو کثیرالاضلاع را بر تنجی تبدیل نموده دو

آنها را اضلاع مثلثی قائم الزاویه قرار دهیم مربع وتر این مثلث مساوی

با مجموع دو کثیرالاضلاع خواهد بود (جمع دو شکل)

۳۳۴ - فرع - چون دو شکل را بر تنجی تبدیل نموده ضلع مربع اعظم را در مثلثی قائم الزاویه

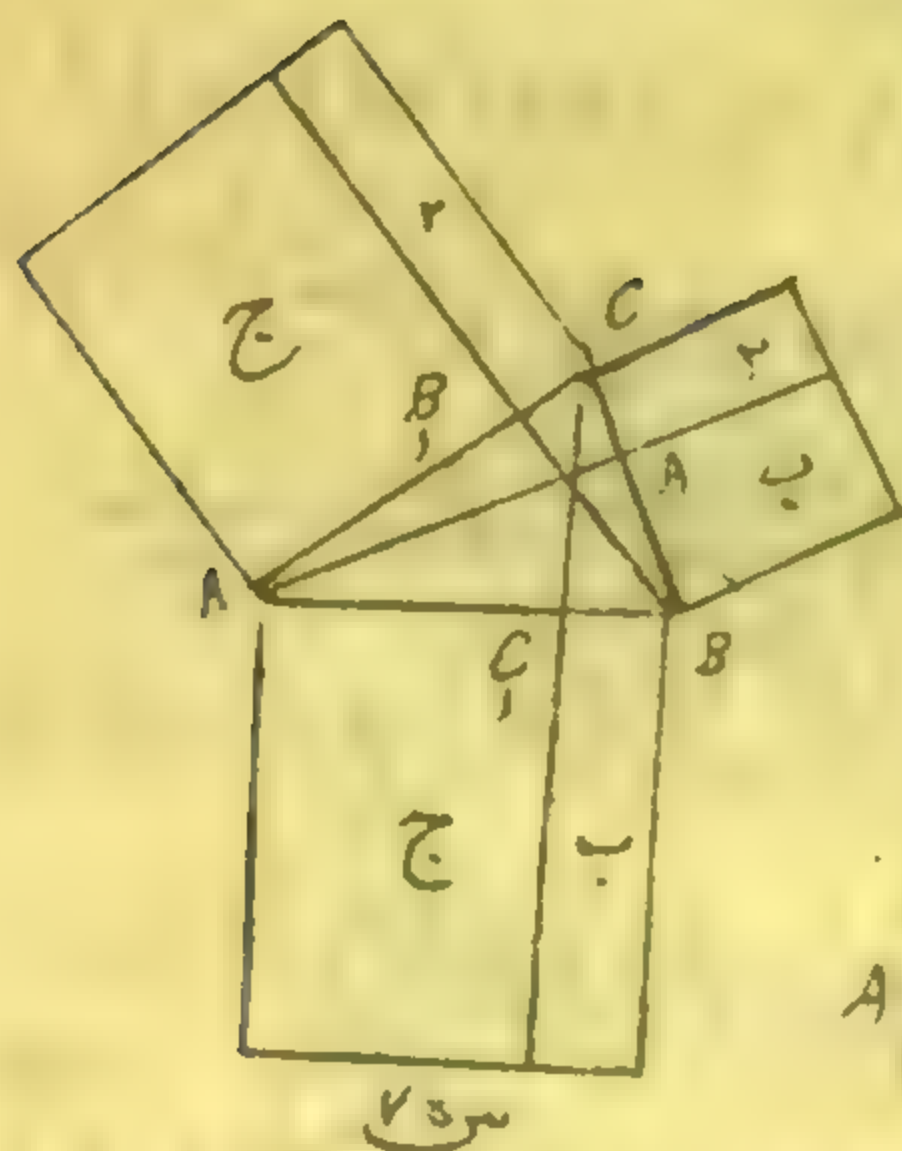
قرار دهیم که ضلع مربع دیگر یک ضلعش باشد مربع ضلع سوم این مثلث قفاصل و شکل خواهد بود  
(تفسیر بقدر شکل)

۲۲۵ - قضیه ۶۹ - مربع ضلع مقابل بر او یه حاده مثلث  
معا دل است با مجموع مربعین دو ضلع دیگر منها می ضعف سطح  
کمی از این دو ضلع در تصویر دیگری بر همین ضلع  
مثلاً در مثلث  $ABC$  بر  $BC$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AB$$

برهان -



$$BC \cdot CA = AC \cdot CB$$

$$BC \cdot BA = AB \cdot BC$$

$$AB \cdot AC = AC \cdot AB$$

$$AB \cdot CB = AC^2 - AC \cdot AB$$

$$AB \cdot CB = AB^2 - AB \cdot AC$$

$$BC \cdot CA + BC \cdot BA = BC^2$$



بعد از اسقاط جمل مشترک از طرفین و نقل  $AB \times AC$  بطرف ثانی حاصل میشود

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC$$

۳۳۶ - قضیه ۷۰ - مربع ضلع مقابل بزایه منفرجه

مشت معادل است با مجموع مربعتین دو ضلع دیگر با ضلع

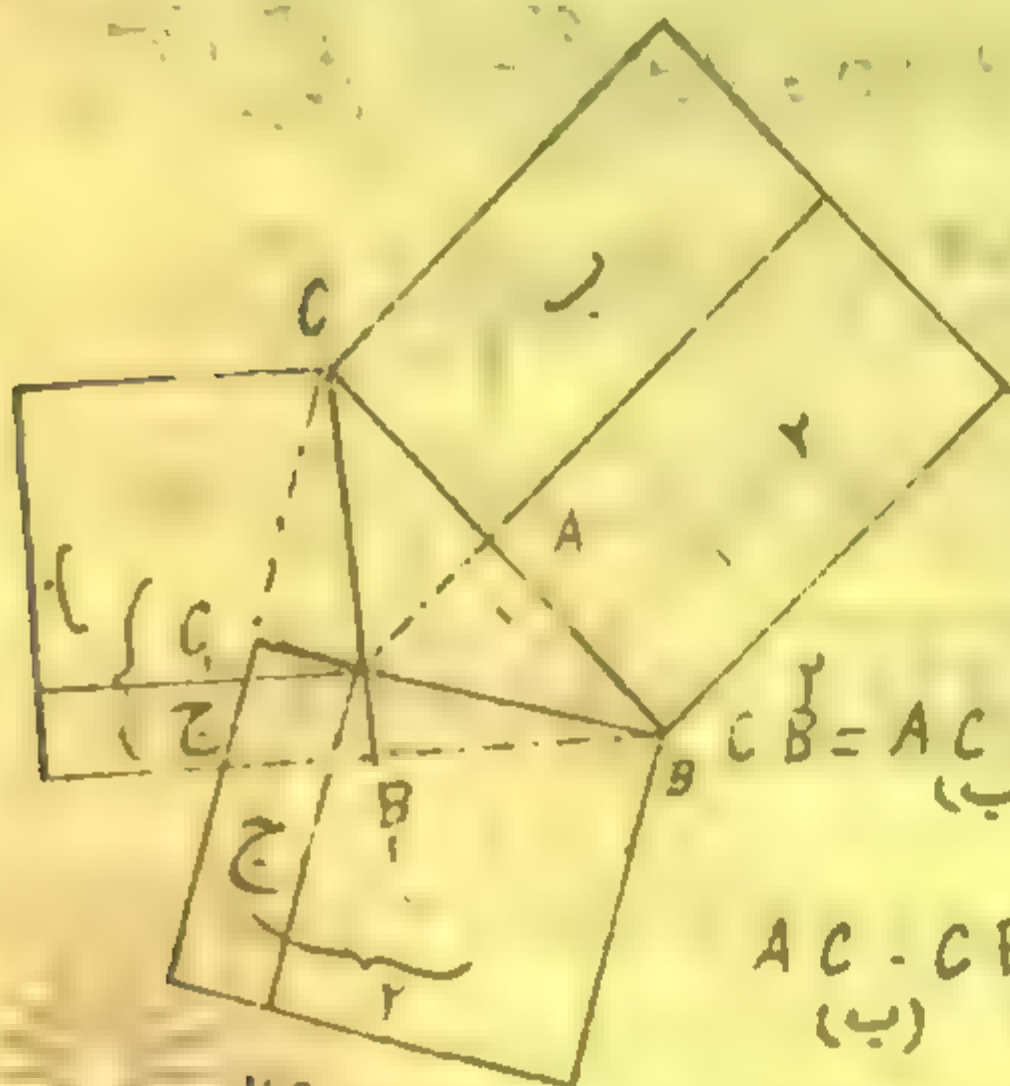
مستطی یکی از آن دو ضلع دیگر بر همین ضلع

مثلاً در مشت  $ABC$  سر ۷۶

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AB$$

برهان - چون قضیه تصویر برادر باره دو زاویه  $C$  و  $B$  اعمال کنیم حاصل میشود



$$CB \cdot CA = AC \cdot CB \quad (ب)$$

$$CB \cdot BA = AB \cdot BC \quad (ج)$$

$$BC^2 = AC \cdot CB + AB \cdot BC \quad (ب) \quad (ج)$$

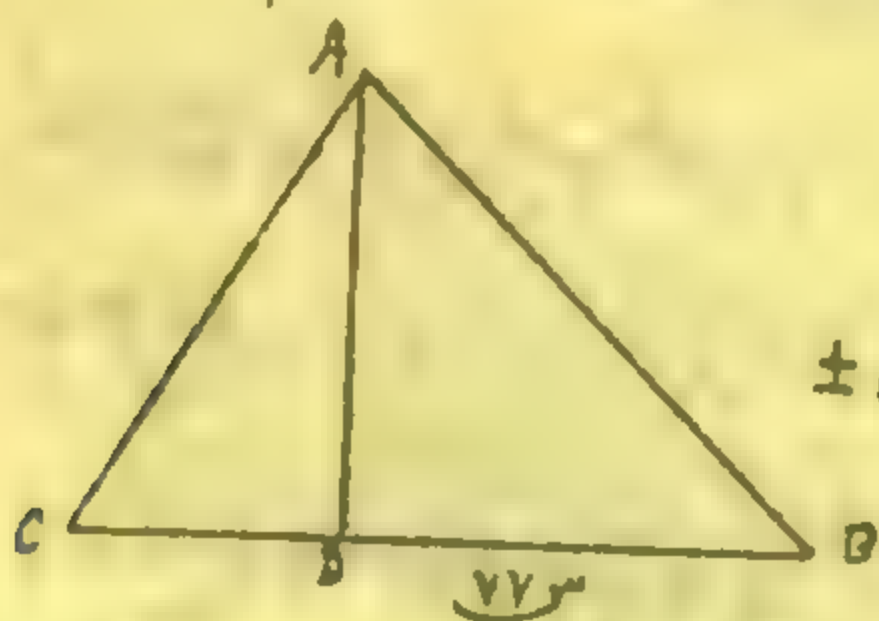
$$AC \cdot CB = AC^2 + AC \cdot AB \quad (ب)$$

$$AB \cdot BC = AB^2 + AB \cdot AC \quad (ج)$$

معادله میشود  $AC \cdot CB + AB \cdot CB = AC^2 + BC^2 + (AC \cdot AB + AB \cdot AC)$   
 لیکن بقضیه تصویری  $AC \cdot AB = AB \cdot AC$  (ج) قسمتی که ممکن است بین الیها پس

طرف ثانی را به  $AC \cdot AB$  یا به  $AC \cdot AB$  تبدیل نموده بعد از این تبدیل  
 چون بجای طرف اول مساوی آن  $BC^2$  را قرار دهیم حکم قضیه نتیجه میشود  
 ۳۳۷- مسئله - مطلوب است مساحت مثلثی که ضلعش معلوم باشد

حلی - ضلع مثلث  $ABC$  را موافق معمول  $a$  و  $b$  و  $c$   
 فرض میکنیم پس  $s = \frac{a}{2} \times h_a$  لیکن بحکم قضیه عروس  $h_a^2 = b^2 - c^2 + 2cd$  و  
 موافق اینکه  $c$  حاذو یا سفرب باشد بقضیه ۶۹ یا ۷۰ معلوم میشود که



$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2a \cdot cd$$

از آن استخراج میکنیم  $\pm cd = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$

پس  $c^2 d^2 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}$

و لذا  $h_a^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}$

یا پس ارتفاع استخراج جذر از طرفین  $h_a = \frac{\sqrt{4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2a}$

چون این مقدار را در دستور مساحت بجای  $h_a$  قرار دهیم نتیجه میشود

$$s = \frac{\sqrt{4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{4}$$



اگر چه همین دستور میتوان برای مساحت مثلث از روی اضلاع بکار برد لیکن چون مقدار تحت را دیکال را موافق قواعد جبری بعوامل مختصراً کنیم دستور فوق خیلی ساده و متعارف می شود از اینست

$$4s^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] =$$

$$(a+b+c)(c+b-a)(c+a-b)(c-a+b)$$

حال فرض میکنیم  $a+b+c = 2p$  پس  $c+a-b = 2p-2b$  و  $c-a+b = 2p-2a$

و  $a+b-c = 2p-2c$  و آنوقت رابطه فوق

چنین نوشته میشود  $4s^2 = (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)$

یا  $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

و بنا بر این  $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

فرض میکنیم  $a = ۷۷$  و  $b = ۵۱$  و  $c = ۴۰$  پس  $2p = ۱۶۸$

$s = \sqrt{۸۴ \times ۷۷ \times ۳۳ \times ۲۴} = ۹۲۴$  در نتیجه مربع

## تمرینات

۱- مطلوب است اثبات احکام ذیل

حکم ۱- در هر مثلث مجموع مربعات دو ضلع مساوی است با نصف مربع ضلع سوم

بعلاوه نصف مرتبه ضلع سوم یعنی مثلاً

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

حکم ۲ - در شکل لوز مجموع مرتبین دو قطر معادل است با چهار برابر مربع یک ضلع  
حکم ۳ - در هر متوازی الاضلاع مجموع مرتبین دو قطر معادل است

با مجموع مربعات اضلاع

حکم ۴ - در هر ذوار بقا اضلاع مجموع مرتبین دو قطر معادل است با مجموع مربعات  
اضلاع منهای چهار برابر مربع خطی که مقصود و قطر را وصل کند

ب - مسائل ذیل را حل بنمایید

مسئله ۱ - پنج ابریم مرتبی و اقامه مساوی مجموع ثانیات معادل تفاضل دو مربع معلوم

رسم کنیم مطلوب ضلع آن است

مسئله ۲ - مطلوب است ضلع مرتبی که  $n$  برابر مربع معلومی باشد

طریقه حل - عدد  $n$  را مجموع یا تفاضل چندین مربع بدل مینمایم

مثلاً  $(n=60)$   $60 = 1^2 - 2^2$  و  $(n=10)$   $10 = 1^2 + 3^2$

و  $(n=14)$   $14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$  و  $(n=47)$   $47 = 1^2 - 1^2 - 2^2 - 7^2$  و غیره

مسئله ۳ - مشتق از معادلات ذیل رسم کنید



$$1 - a, c^r + b^r, m_c \text{ یا } m_b$$

$$2 - a, c^r + b^r, \alpha \text{ یا } \beta \text{ یا } \gamma \text{ یا } k_a \text{ یا } k_b \text{ یا } k_c \text{ یا } r$$

$$3 - m_a, c^r + b^r, m_c \text{ یا } m_b$$

$$4 - m_a, c^r + b^r, \alpha \text{ یا } \beta \text{ یا } \gamma \text{ یا } k_a \text{ یا } k_b \text{ یا } k_c \text{ یا } r$$

طریقه حل - موافق حکم صفحه ۱۴۰  $r(c^r + b^r) = r m_a^2 + a^2$

و بوسیله این معادله قطعات لازم برای رسم مثلث بدست میآید

مسئله ۴ - مثلثی از معلومات ذیل رسم نمایند

$$a, d (= b^r - c^r) \text{ یا } \alpha \text{ یا } \beta \text{ یا } \gamma \text{ یا } k_a \text{ یا } k_b \text{ یا } k_c \text{ یا } m_a \text{ یا } r$$

طریقه حل - فرض میکنیم مثلث مطلوب  $ABC$  موجود باشد. رسم ارتفاع

$AD$  موجب قضیه اُوروِس

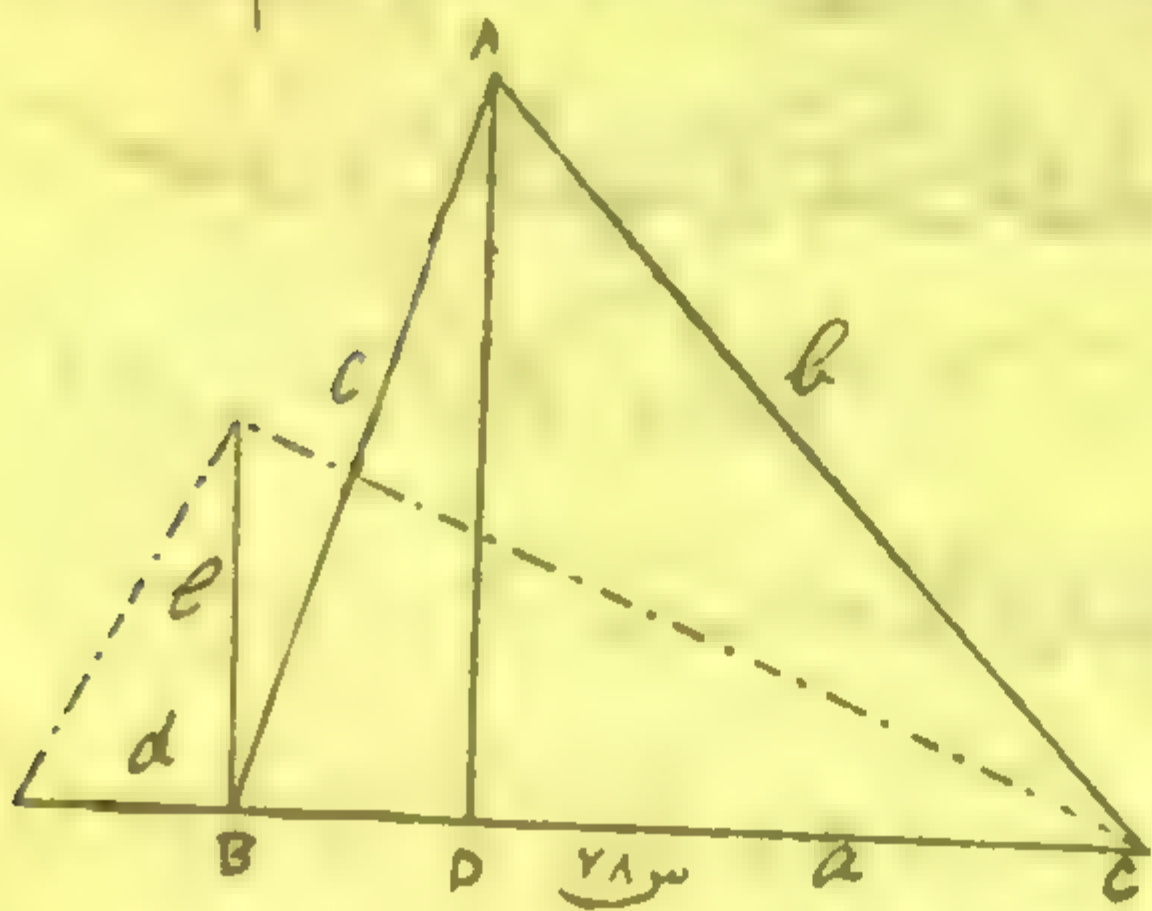
$$b^r = A'D + C'D$$

$$c^r = A'D + B'D$$

$$\text{پس } b^r - c^r = C'D - B'D$$

$$\text{یا } b^r = (CD + BD)(CD - BD)$$

$$\text{ولی } CD + BD = a$$



$$p^2 = a(CD - BD) \quad \text{پس}$$

از تساوی اخیر بواسطه معلوم بودن  $a$  و  $p = C^2 - c^2$  مقدار

$CD - BD$  که آنرا اختصاراً  $d$  فرض میکنیم معلوم شود (رجوع شکل) و چون

$CD + BD = a$  پس  $CD = \frac{a+d}{2}$  و بعد از آنکه  $CD$  معلوم شد

نقطه  $D$  که موقع  $p$  است بدست میآید و بقیه مسد بهولت حل میشود

مسئله ۵ - ضلع مربعی  $a$  است مطلوب است میسب طول  $d$  که قطر آن

$$(جواب \quad d = a\sqrt{2})$$

مسئله ۶ - ضلع مثلثی متساوی الاضلاع بطول  $a$  معلوم است میسب ارتفاع

آنرا حساب کنیم

مسئله ۷ - مطلوب است مساحت مثلث متساوی الاضلاع بحسب ضلع آن

$$(جواب \quad s = \frac{a^2}{4}\sqrt{3})$$

مسئله ۸ - مطلوب است مساحت مثلثی متساوی الساقین با قاعده  $a$  و ساق  $p$

$$(جواب \quad s = \frac{a}{4}\sqrt{4p^2 - a^2})$$

مسئله ۹ - مساحت مثلثی را بحسب اشعه دو ایر محاطیه معلوم کنید

$$s = \sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4}$$

مسئله ۱۰ - اضلاع مثلث معلوم است اشعه دو ایر محاطیه را حساب کنید



# فصل دوم - تناسب و تشابه اشکال

## ۱- نسبت دو قطعه خط و تناسب قطعات

۳۳۸- تعریف - نسبت قطعه  $a$  بقطعه  $b$  عده مراتبی است که قطعه  $a$

شامل قطعه  $b$  یا اجزای آن میگردد و عبارت از آخری عده است که اندازه  $a$  خواهد بود و متشکله قطعه  $b$  واحد طول فرض شود

نسبت قطعه  $a$  را بقطعه  $b$  چنین  $\frac{a}{b}$  چنین  $b$  :  $a$  گویند

۳۳۹- فرع - هرگاه قطعه  $b$  برآت صحیح  $m$  در قطعه  $a$  بگنجد و باقیمانده

کوچکتر از  $b$  نماذ نسبت  $\frac{a}{b}$  عدد صحیح  $m$  خواهد بود

و در این صورت قطعه  $b$  را عاود یا مقیاس  $a$  گویند

۳۴۰- فرع - اگر  $b$  مقیاس  $a$  و  $a$  مقیاس  $b$  باشد عموماً ممکن است

مقیاس مشترکی مانند  $c$  بیابیم که در  $a$  دست  $p$  مرتبه (مثلاً ۴ مرتبه)

و در  $b$  دست  $q$  مرتبه (مثلاً ۵ مرتبه) بگنجد آنوقت وضاحت که

$$p \cdot c = a = q \cdot c = b \text{ یعنی که}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{p \cdot c}{q \cdot c} = \frac{p}{q}$$

پس در این صورت نسبت  $m$  یعنی نسبت  $\frac{a}{b}$  کسر  $\frac{p}{q}$  خواهد بود  
(مثلاً  $\frac{4}{5}$ )

۳۴۱ - فرع - مکتب هر چند قطعه  $b$  را کوچک فرض کنیم باز در هر دو قطعه  
 $a$  و  $b$  برآت صحیح بکنند و عبارتة اخری دو قطعه  $a$  و  $b$  مقیاس مشترک  
نداشته باشد در این صورت نسبت  $\frac{a}{b}$  را اضم خوانند (مثلاً میتوان ثابت  
نمود که نسبت قطر مربع بصلع آن اضم است)

۳۴۲ - نسبت اضم را اسواره بتقریب اندازه بگیرند بطریق که قطعه  $b$  را بر  $q$  جزو  
متساوی تقسیم میکند و قطعه  $a$  را با یکی از اجزای  $q$  بسجند فرض کنیم  $a$  جزو  $m$  برابر  
هر مرتبه شامل شود و باقیانده کوچکتر از یک جزو باشد معلوم است که نسبت  $\frac{a}{b}$  از کسر  $\frac{p}{q}$  بزرگتر  
ولی از  $\frac{p+1}{q}$  کوچکتر خواهد بود و بدو یکی اختلاف  $\frac{a}{b}$  با بزرگترین کسر  $\frac{p}{q}$  از  $\frac{1}{q}$  کمتر است  
و لهذا هر چه  $q$  یعنی شماره تقسیمات  $b$  بزرگتر باشد کسر  $\frac{p}{q}$  و  $\frac{p+1}{q}$  بمقدار کمی  
 $\frac{a}{b}$  نزدیکتر است و عداً یکی از این دو کسر را بعضی نسبت  $\frac{a}{b}$  چندی را میکند و آنرا مقدار  
تقریبی نسبت مفروض کسر  $\frac{1}{q}$  را حد تقریب گویند تقریب کسر  $\frac{p}{q}$  را نقصانی  
و تقریب  $\frac{p+1}{q}$  را اضافی نامیده اند  
در این دور نسبت اضم را مسکوت عنه میگویند و اسواره قطعات را صاحب



مقیاس مشترک فرض می‌نماییم و بعبارة احسنه ی فرض میکنیم همیشه حد تقریب با اندازه  
کوچک باشد که قابل احتساب نبوده بتوان مقدار تقسیری را بجای نسبت  
واقعی قرار داد

۳۴۳ - فرع - نسبت با بین دو قطعه خط مساوی نسبت دو عدد دمی (رجوع بحساب)  
که اندازه دو قطعه مفروض باشند بشرطی که هر دو قطعه با یک واحد سنجیده شده باشند  
۳۴۴ - تعریف - هرگاه دو نسبت  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{c}{d}$  متساوی باشند چهار خط  
 $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  را متناسب و هر یک را چهارم جزو متناسب با بین  
سه خط دیگر نامند و تساوی  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  را متناسب خوانند  
(برای خواص متناسب بحساب رجوع شود)

۳۴۵ - تعریف - هرگاه در متناسب فوق  $c = b$  یعنی  $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$  باشد  
قطعه  $b$  را واسطه هندسی با بین دو قطعه  $a$  و  $d$  و هر یک از دو قطعه اخیر  
مثلاً  $a$  را سوم جزو متناسب با بین دو قطعه دیگر  $b$  و  $d$  گویند

۳۴۶ - فرع - چون در هر متناسب حاصل ضرب طرفین مساوی با حاصل ضرب

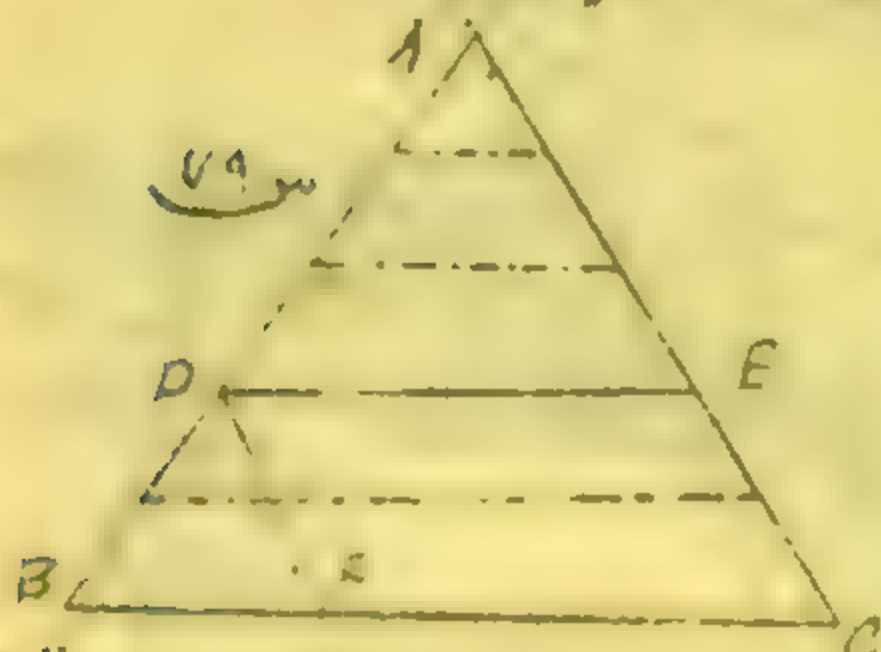
وسطین است معلوم میشود که مربع واسطه هندسی دو قطعه معادل با سطح آنها است

۳۴۷ - تعریف - هرگاه نقطه  $C$  بر خط  $AB$  یا امتداد آن بقسمی فرض شود

که  $\frac{CA}{CB} = \frac{r}{q}$  باشد گوئیم نقطه  $C$  خط مفروض را بر نسبت  $r$  و  $q$  یا نسبت  $\frac{r}{q}$  تقسیم نمود و حال اگر نقطه  $C$  مابین  $A$  و  $B$  باشد گوئیم قطعه  $AB$  بدو قطعه اضافی تقسیم شده و آنرا تقسیم را نقصانی نامیم

### ب - تناسب در مثلث

۳۴۱ - قضیه ۷۱ - هر خطی که بموازات یک ضلع مثلث رسم شود دو ضلع دیگر را متناسب قطع میکند (قضیه طالس)



ف ۷۹  $DE \parallel BC$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{ح}$$

ب - فرض میکنیم  $\frac{AD}{DB} = \frac{r}{q}$  باشد

چون  $AD$  را بر هر جز و  $DB$  را بر  $q$  جز و متادوی منقسم نمود و بر افتادیم تقسیم خطوطی بموازات  $BC$  رسم کنیم از سابق میدانیم (فرع ۱۱۲) که  $AE$  بر هر جز و  $EC$  بر  $q$  جز و متادوی منقسم میشود که هر جز را  $h$  فرض

$$\frac{AE}{EC} = \frac{r \cdot h}{q \cdot h} = \frac{r}{q} \quad \text{میکنیم پس}$$

$$\frac{r}{q} = \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{و بنا بر این}$$

۳۴۹ - فرع - ترکیب نسبت از تناسب فوق این دو تناسب نتیجه میشود



$$\frac{AD+DB}{DB} = \frac{AE+EC}{EC} \text{ و } \frac{AD+DB}{AD} = \frac{AE+EC}{AE}$$

$$\frac{DB}{EC} = \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \quad !$$

یعنی نسبت هر دو ضلع مثلث مثل نسبت قطعاتی است از همان ضلع نظیر نظیر که موازی  
خطی موازی با ضلع سوم تحدید شده باشد

۳۵۰ - قرع - چون  $DF$  را موازات  $AC$  رسم کنیم این تناسب حاصل شود

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{FC} \quad ! \text{ اما } FC = DE \text{ ( زیرا } DFCF \text{ متوازی الاضلاع است )}$$

پس نتیجه میشود

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

یعنی نسبت دو ضلع قطع شده بدو قطعه مجاور رأس مثلث ضلع سوم است <sup>بقطعه</sup>

قاطع و عبارت آن سهی دو مثلث  $ABC$  و  $ADE$  متناسب الاضلاع <sup>عند</sup>

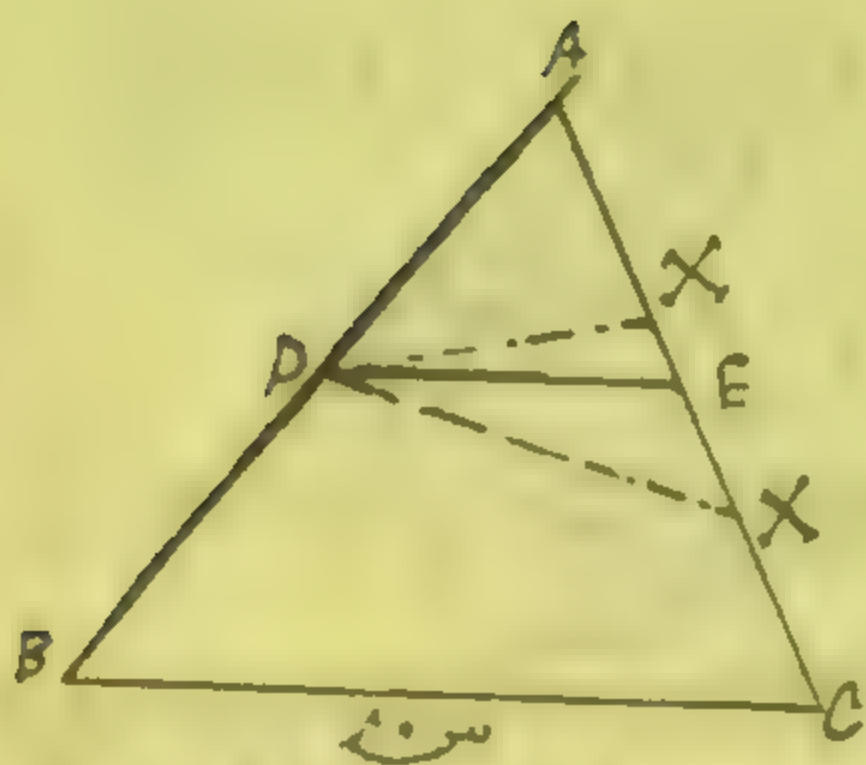
۳۵۱ - قضیه ۷۲ - هر خطی که دو ضلع مثلثی را متناسب قطع کند

با ضلع سوم مثلث موازی است (عکس قضیه طالس)

ب - (مخالف) - اگر خطی که از نقطه  $D$  سه موازات  $BC$  رسم شود

بر نقطه  $E$  مردر کند ناچار  $AC$  را بر نقطه دیگر مانند  $A$  قطع

میکند و این تساوی حاصل است (ق ۷۱)



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AX}{XC}$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{لیکن بالفرض}$$

$$\frac{AX}{XC} = \frac{AE}{EC} \quad \text{پس}$$

$$\frac{AX}{AE} = \frac{XC}{EC} \quad \text{یا تبدیل وسطین}$$

و این تساوی محال است زیرا طرف اول بزرگتر (یا کوچکتر) و طرف ثانی کوچکتر (یا بزرگتر) از واحد است پس ممکن نیست خطی که از نقطه D بموازات BC رسم میشود

AC را بر نقطه غیر از E قطع کند و لهذا همان DE موازی

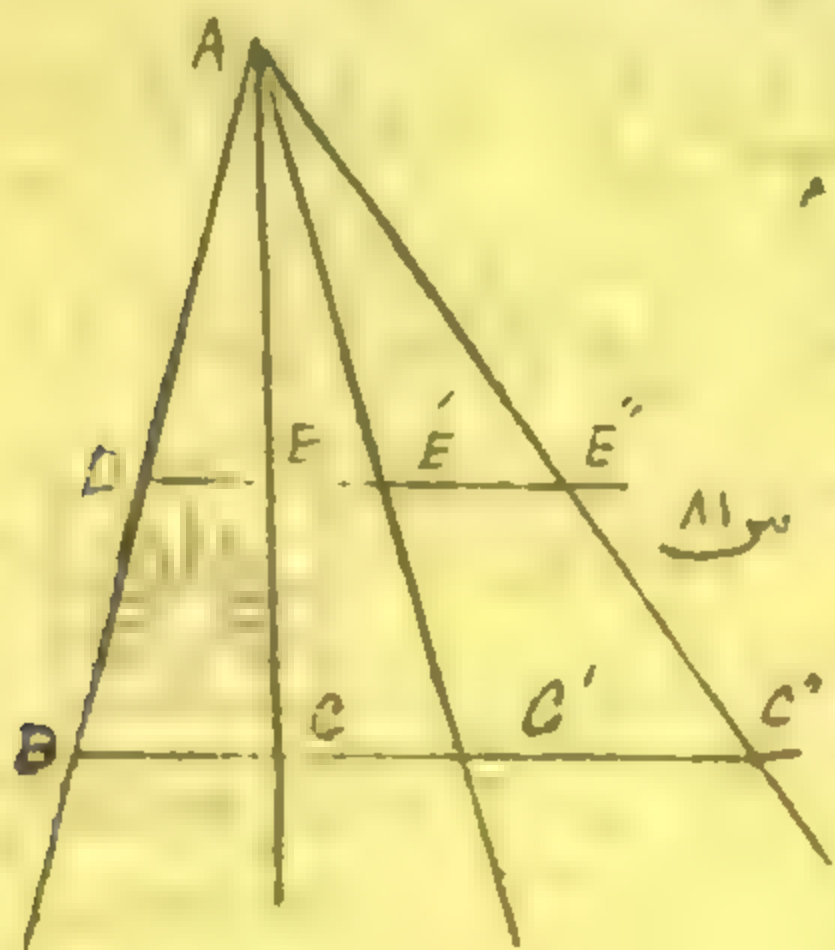
با BC خواهد بود

۳۵۲ - فرع - عکس فرع ۳۴۹ صحیح است

۳۵۲ - قضیه ۷۳ - هرگاه خطوط شعاعیه متحد المبدأ را (دسته

شعاعی) دو خط متوازی قطع کند قطعات متناظره اشعه متناصبند

(قضیه ششم)



زیرا چون خط AC مساوی است

نقطه A دوران کند اگر چه طول قطعات

BC و DE تغییر میکند اما چون



ثابت است همواره دو ضلع مثلث  $ABC$  تناسب قطع می شود نسبت  $\frac{AE}{AC}$

در هر حال مساوی  $\frac{AD}{AB}$  و لهذا ثابت است

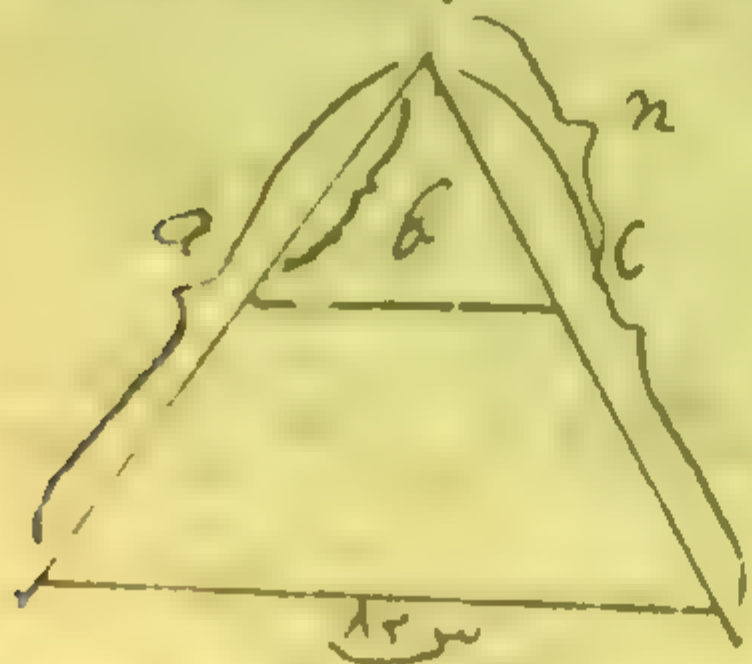
۳۵۴ - فرع - قطعات متناسب دو متواری قطع نیز متناسبند و برهان

این حکم از فرع ۳۵۳ استنباط می شود

۳۵۵ - مسئله اصلی - میخواهیم چهارم جز را تناسب با بین سه قطعه

$a$  و  $b$  و  $c$  بدست آوریم

حل - دو خط شعاعی رسم نموده از مبدأ مشترک آنها دو



$a$  و  $b$  را بر یکی از آن دو

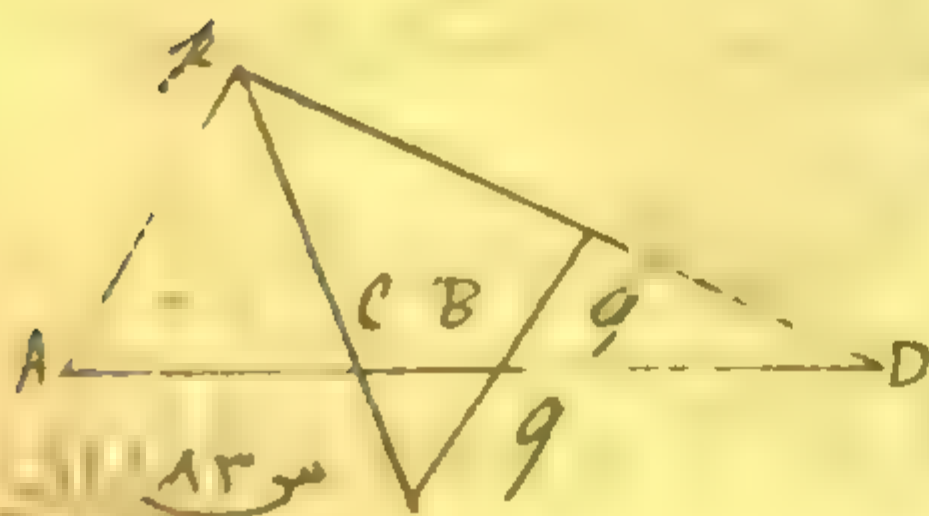
و قطعه  $c$  را بر دیگری نقل نموده

مستقی الیه  $a$  و  $c$  را وصل

نموده از مستقی الیه خطی موازی با خط  $a$  رسم نموده و به خط  $c$  قطع می کنیم

جزء مطلوب است (قطعه)

۳۵۶ - مسئله اصلی - میخواهیم



$AB$  را بر نسبت  $a$  و  $b$  تقسیم

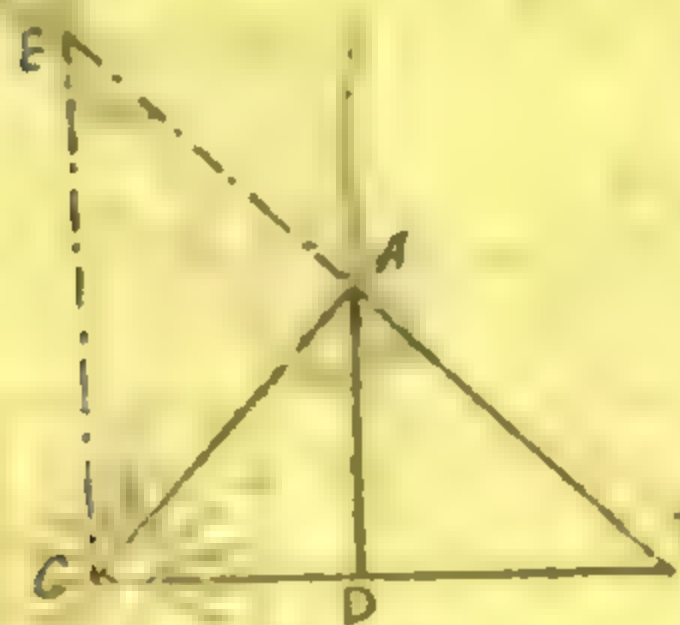
حل - بر دو نقطه  $A$  و  $B$  موازی

دو خط متوازی با هم است. ادختم یاری مرور میدهم و بر آنکه نقطه  $A$  کشند  
 قطعه مساوی با  $g$  برابر واحد اختیاری و بر آنکه نقطه  $B$  مرور نمود قطعه  
 مساوی  $g$  برابر واحد در دو جهت نقل نمود و منتهی الیه دو قطعه  $g$  و  
 $g$  را وصل میکنیم اگر دو منتهی الیه در دو طرف  $A B$  باشند  $1$  هر  
 دو  $g$  مختلف البتة باشند (قطعه  $A B$  بدو جنبه اضافی  $C B \cdot C A$   
 و  $1$  بدو قطعه نقصانی  $D B$  و  $D A$  منقسم میگردد و فرع منقسم

### ج - بعضی موارد استعمال قضیه طالس

۲۵۷ - قضیه ۷۴ - اولاً منصف هر زاویه داخل  
 مثلث ضلع مقابل را بدو قطعه اضافی متناسب با دو  
 ضلع دیگر تقسیم میکند

طریقه برهان - ضلع  $A B$  در جهت  $B A$  بساز تا نقطه  $E$



مساوی با  $A C$  است داد و داد و  $E C$  را

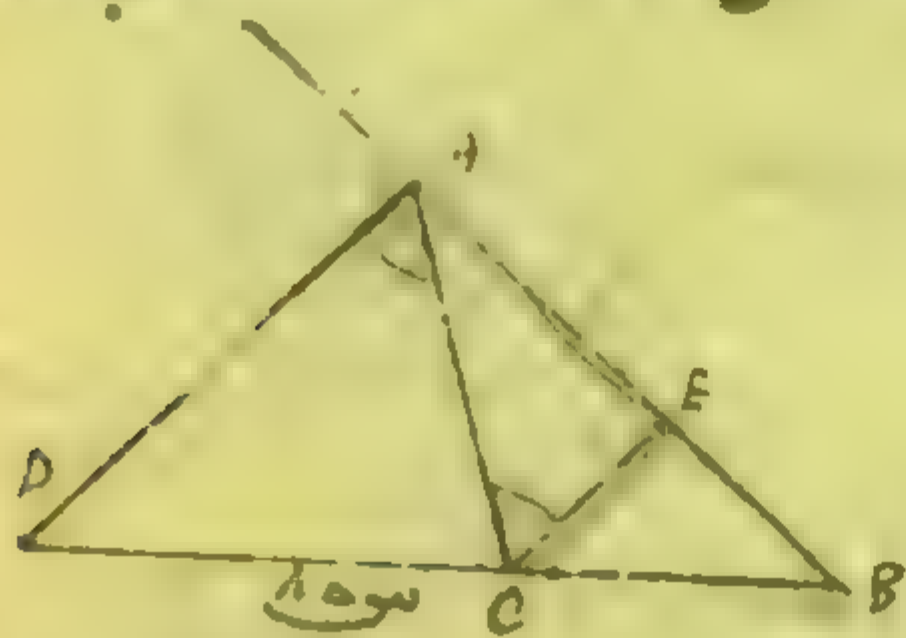
وصل میکنیم سهولت میتوان ثابت کرد که

$E C \parallel A D$  است زیرا خط  $A D$  اینک

مثلث  $A E C$  متساوی الساقین است



$\hat{E}$  نصف  $BAC$  یعنی سادی با  $BAD$  خواهد بود  
 ثانیاً منصف هر زاویه خارجیه مثلث ضلع مقابل را بر دو  
 نقصانی متناسب با دو ضلع دیگر تقسیم میکند  
 طریقه برهان - جزو  $AE$  را از ضلع  $AB$  سر  $A$  سادی با  $AC$  جدا



نمود  $EC$  را وصل میکنیم

بقیه برهان مثل سابق است

۳۵۸ - قضیه ۷۵ - خط

که بر رأس مثلث مرور نموده ضلع مقابل را بر دو قطعه  
 اضافی (نقصانی) متناسب با دو ضلع دیگر قطع کند منصف  
 الزاویه داخله (خارجیه) است (عکس قضیه ۷۴)

طریقه برهان - مانند قضیه ۷۴ عمل میکنیم و بهولت معلوم میشود که  $BAD$   
 سادی با  $\hat{E}$  و نصف  $BAC$  میباشد و همچنین اگر

تقسیم نقصانی فرض شود سر ۱۵

تمرینات

۱ - احکام ذیل را ثابت کنید

۱- هر خط که بوازاات دو قاعده، دوزنفت رسم شود دو صنوع دیگر را بر  
یک نسبت قطع میکند

۲- خطی که دو ساق دوزنفت را بر یک نسبت قطع کند با دو قاعده  
موازی است

۳- نقطه تقاطع دو ساق دوزنفت بر ساق را بدو قطعه نقصانی  
متناسب تقسیم میکند

۴- خط واصل بین نقطه تقاطع دو قطر (یا نقطه تقاطع دو ساق) دوزنفت  
و وسط یک قاعده و قاعده دیگر را نصف میکند

۵- خط واصل بین نقطه تقاطع دو قطر و نقطه تقاطع دو ساق دوزنفت دو قاعده را نصف میکند

ب- مطلوب است حل مسائل ذیل

مسئله ۱- خطی بطول  $۱۰^m$  را اولاً بدو قطعه اضافی ثانیاً بدو قطعه

نقصانی بر نسبت  $\frac{۴}{۵}$  یا  $\frac{۳}{۸}$  یا  $\frac{۷}{۴}$  یا  $\frac{۱۱}{۶}$  تقسیم نمایند

مسئله ۲- خطی بطول  $۱۲^m$  را بر سه جزو تقسیم یا ۲ و ۳ و ۴

یا ۲ و ۴ و ۵ یا ۳ و ۵ و ۶ تقسیم کنید

مسئله ۳- میخواهیم قطعه AB را که طول آن  $۵^m$  =  $\frac{۱}{۲}$  درض شده بود



در نقطه  $c$  و  $d$  چنان تقسیم کنیم که دو تناسب ذیل برقرار باشد

$$\frac{CD}{DB} = \frac{6}{7} \quad , \quad \frac{AC}{CD} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{CD}{CB} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{AC}{CB} = \frac{2}{7} \quad |$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{9}{5} \quad , \quad \frac{AD}{CD} = \frac{6}{7} \quad |$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{6}{7} \quad , \quad \frac{AD}{DB} = \frac{1}{3} \quad |$$

مسئله ۴ - معادلات ذیل را بر یکدیگر حل نمایند

$$\frac{5}{9} = \frac{x}{4} - 3 \quad \frac{3}{7} = \frac{5}{x} - 2 \quad \frac{3}{x} = \frac{4}{5} - 1$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{x} - 6 \quad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{x} - 5 \quad \frac{3}{5} = \frac{x}{1} - 4$$

$$ax = 3b^2 - 9 \quad ax = bc - 1 \quad \frac{a+b}{a+b} = \frac{c}{x} - 7$$

مسئله ۵ - مشتق از  $a+b=c$  ،  $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$  و  $c$  یا  $x$

یا  $m$  یا  $k_a$  یا  $k_b$  رسم کنید

طریقه حل - بواسطه ترکیب نسبت از تناسب  $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$  حاصل میشود

$$\frac{c}{a} = \frac{p+q}{p} \quad \text{یا چون } a+b=c \text{ معلوم فرض شد } \frac{c}{a} = \frac{p+q}{p}$$

پس  $a$  چهارم جزو تناسب بین سه مقدار معلوم  $q$  و  $p$  و  $c$

خواهد بود همینکه  $a$  و  $b$  معلوم شدند را برسم مشتق از  $a$  و

که و چند معلوم دیگر راجع میگردد

مسئله ۶- مثلی از  $l = b - a$  و  $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$  و  $c$  یا

$m_a$  یا  $k_a$  یا  $k_b$  رسم کنید

مسئله ۷- مثلی از  $l = k_a + k_b$  و  $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$  و  $c$  یا  $m_a$  رسم کنید

طریقه حل- چون  $\frac{k_b}{k_a} = \frac{a}{b}$  معلوم شود  $\frac{k_b}{k_a} = \frac{p}{q}$  و لذا اگر

نسبت  $\frac{b}{k_a} = \frac{p+q}{q}$  و از اینجا  $k_b$  و  $k_a$  معلوم شود

مسئله ۸- مثلی از  $l = k_a - k_b$  و  $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$  و  $c$  یا

$m_a$  رسم کنید (شرط امکان مسدائیت  $p > q$ )

مسئله ۹- مثلی از  $a$  و  $b$  و  $l = k_a - k_b$  رسم کنید

طریقه حل- از  $\frac{k_a}{k_b} = \frac{a+b}{a}$  نتیجه میشود  $\frac{k_a}{k_b} = \frac{a+b}{a}$  پس

$k_a$  و  $k_b$  معلوم و مسئله حل میشود

مسئله ۱۰- مثلی از  $a$  و  $b$  و  $l = k_a - k_b$  رسم نمائید

(شرط امکان اینست  $a < b$ )

مسئله ۱۱- مثلی از  $k_a$  و  $k_b$  و  $k_c$  رسم نمائید

حل- از تساوی  $k_a = k_b$  نتیجه میشود  $\frac{a}{k_b} = \frac{b}{k_a}$  و نیز



میستوان یافت که  $\frac{c}{k_c} = \frac{b}{k_b}$  حال اگر در مثلث  $ABC$  سه نقطه

از نقطه  $C$  طول  $CD$  را مساوی  $k_b$  از  $CB$  و طول  $CE$  را مساوی

با  $k_a$  از  $CA$  جدا نمود  $DE$  را وصل نمایم باین تناسب

$$\frac{a}{k_b} = \frac{b}{k_a} \text{ و کسر قتیله ای}$$

$$DE \parallel AB \text{ و لهذا } \frac{CA}{AB} = \frac{CE}{ED}$$

$$\text{یعنی } \frac{b}{c} = \frac{k_a}{ED}$$

$$\text{اما چون } \frac{b}{c} = \frac{k_a}{k_b}$$

$$\text{پس } \frac{k_a}{k_b} = \frac{k_a}{ED}$$

از تناسب اخیر  $ED$  معلوم میشود پس میستوان مثلث  $CDE$  را رسم نمود

و با آن حسره چون ضلع  $AB$  از نقطه  $C$  بقاصد  $k_b$  و  $k_c$  و بوازا  $DE$

واقعیت بهولت رسم شده مثلث  $ABC$  معلوم میگردد

مسئله ۱۲ - بر یکی از دو نقطه تقاطع دو دایره قاطعی چنان برد

دهید که دو وتر حاصل بر نسبت معینی باشند

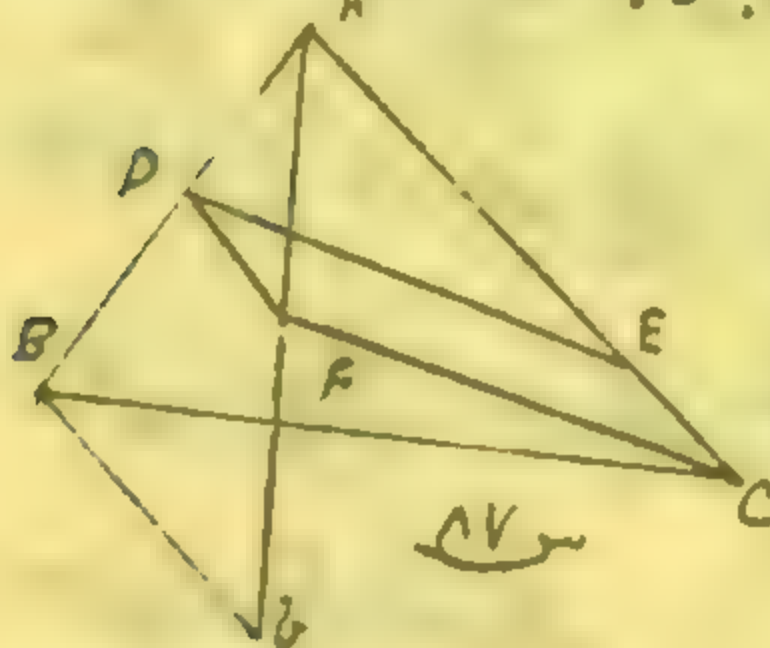
طریقه حل - چون خط المکرزین را بر نسبت دو وتر تقسیم کنیم نسبت فاصدها

دو وتر از دو مرکز بهولت معلوم شده است داد قاطع بدست میاید

مسئله ۱۳ - بر دو ضلع  $AB$  و  $AC$  از تنشت  $AB$   $۱۷$  و  $AC$   $۱۷$  دو نقطه  $D$  و  $E$  را بقسیمی تعیین کنید که  $ED$  بطول معین  $۱۷$  و

$$\frac{AD}{EC} = \frac{r}{9} \text{ باشد}$$

حل - چون از دو نقطه  $D$  و  $E$  تقریباً دو موازی با  $AC$  و  $DE$



رسم نمایم متوازی الاضلاع  $CDEF$

$$\frac{AD}{DF} = \frac{AD}{EC} = \frac{r}{9}$$

حال اگر از نقطه  $B$  خطی موازی با  $AC$

رسم کنیم  $AF$  است و آن را بر نقطه  $G$  قطع میکند و بر فرخ  $۳۵$   $\frac{AD}{DF} =$

$$\frac{AB}{BG} \text{ و بمابست تناسب فوق نتیجه شود } \frac{AB}{BG} = \frac{r}{9} \text{ از این تساوی معلوم میشود}$$

نقطه  $B-G$  و لهذا نقطه  $G$  را معلوم کرد

بعد از تعیین نقطه  $G$  خط  $AG$  را وصل و از مرکز  $C$  با شعاع  $۱۷$  قوسی

رسم کنیم تا  $AG$  را بر نقطه  $F$  قطع کند و چون از این نقطه  $F$   $D$  را موازی با

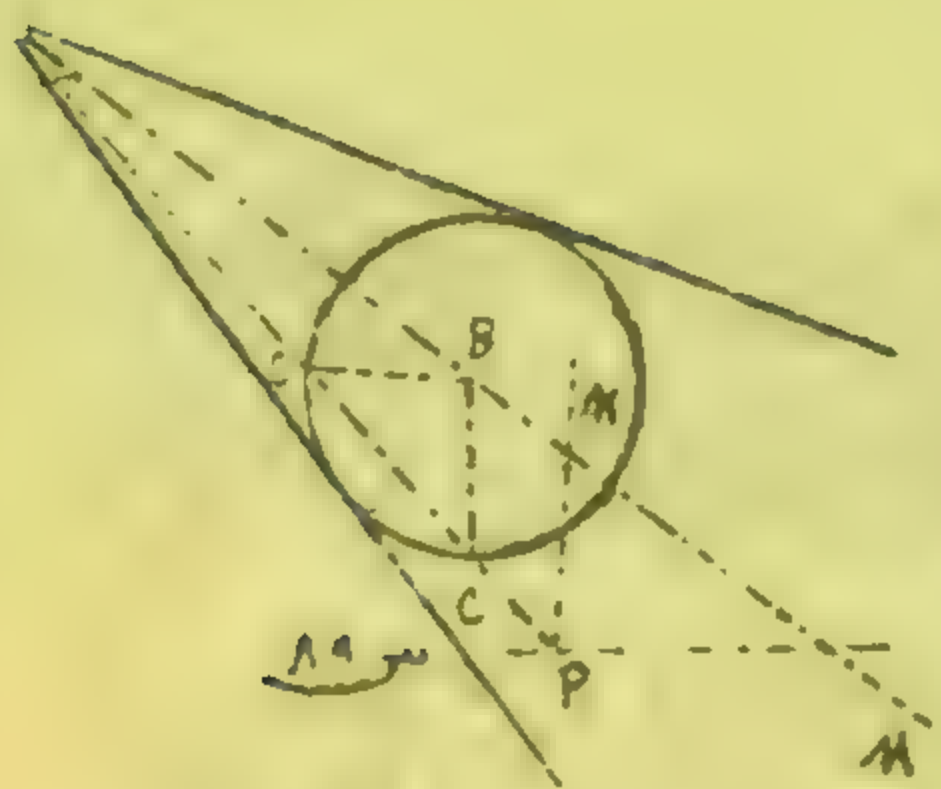
$AC$  رسم کنیم نقطه  $D$  معلوم شد، بالاحسن از  $D$  خط  $DE$  را موازی با

$CF$  مرور می‌دهیم تا نقطه  $E$  معین شود (بحث در حالات مختلفه مسئله

و تحقیق شرط امکان آنرا بعداً مستقیم می‌کنیم)







که با دو ضلع زاویه مناسب شود ۱۹

حل۔ منصف الزاویہ  $A B$ , رسم

منوده از مرکز خستباری B بر این خط

دایره مماس با دو ضلع زاویه  $\text{AP}$  را

وصل کنیم تا دایره مرسومه را بر دو نقطه  $C$  و  $D$  قطع کند حال چون از نقطه

$P$ ، و خط  $PM$ ،  $PM$  را بموازات  $CB$ ،  $CB$  می‌بردیم

دو نقطه  $M$  و  $N$  دو مرکز دو جواب مستداند و از اینجا معلوم میشود که

این مسأله عموماً دو جواب دارد

د۔ حالات تشابہ مثلثات و مقایسہ سطوح

۳۵۹ - تقریفات - دوشیر الاضلاع قشابه (ح) گویند قشابه زوایا

نظیر مطبوعه می و احمد عثمان نظیر مطبوعه می و احمد عثمان

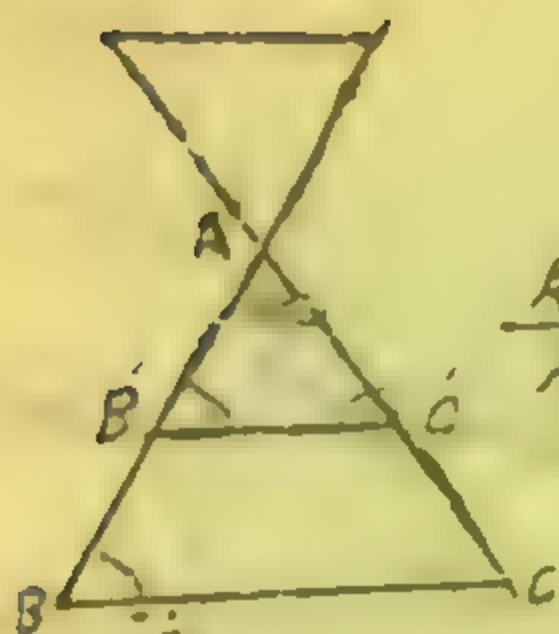
۳۶۰۔ قضیہ ۷۶۔ خطی کہ بواسطت یکضلع مثلث رسم

شود با دو صنوع دیگر مثلثی تکمیل میکند مشابه با مثلث اول

ف - م - ق BC || BC

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' - \tau$$





ب. بموجب فرض ۳۵۵

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

و از طرف دیگر  $\hat{A} = \hat{A}$  (شکل متقابل برابر)

و  $\hat{B} = \hat{B'}$  و  $\hat{C} = \hat{C'}$  (مقابل داخل و خارج) پس دو مثلث

$ABC$  و  $A'B'C'$  که اجزا و عتشان متناسب و زوایای شان متساویست

متشابهست

۳۶۱- مسئله - میخواهیم مثلثی مشابه با مثلث مفروض  $ABC$  رسم کنیم

حل - برای اینک دو مثلث مشابه شوند کافی است که چهار

شرط ذیل در آنها بصدق کند

پس بالضروره

$$E = C$$

$$\begin{cases} \hat{D} = \hat{A} & - ۱ \\ \hat{E} = \hat{B} & - ۲ \end{cases}$$

پس بالضروره

$$\frac{DF}{AC} = \frac{FE}{BC}$$

$$\begin{cases} \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} & - ۳ \\ \frac{DE}{AB} = \frac{FE}{BC} & - ۴ \end{cases}$$

اگرچه فقط دو شرط از این چهار شرط را میتوان بوسیله ترسیم بعمل آورد ولیکن

بچهار قضیه ذیل ثابت شده که اجزای همان دو شرط برای تشابه دو مثلث

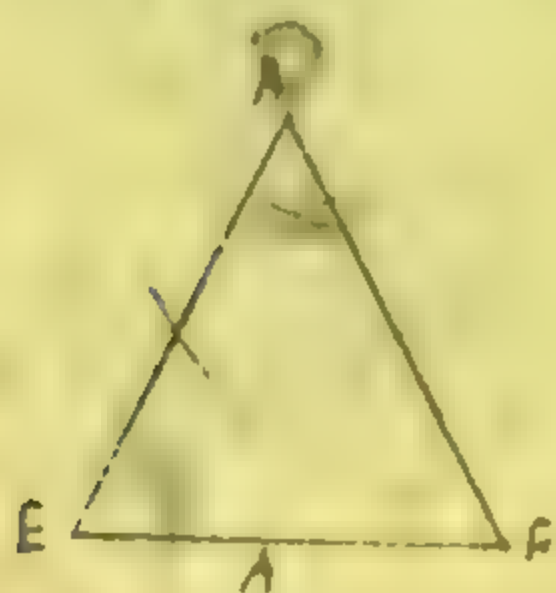
کفایت میکند و از آنجا چهار حالت برای تشابه نظیر حالات تساوی دو مثلث مستقیم

میگرد

۳۶۲ - قضیه ۷۷ - (حالت اول) دو مثلث متشابهند هرگاه

در دو زاویه نظیر نظیر مساوی باشند

$$\text{ف - س ۹۱} \quad \hat{D} = \hat{A} \text{ و } \hat{E} = \hat{B}$$

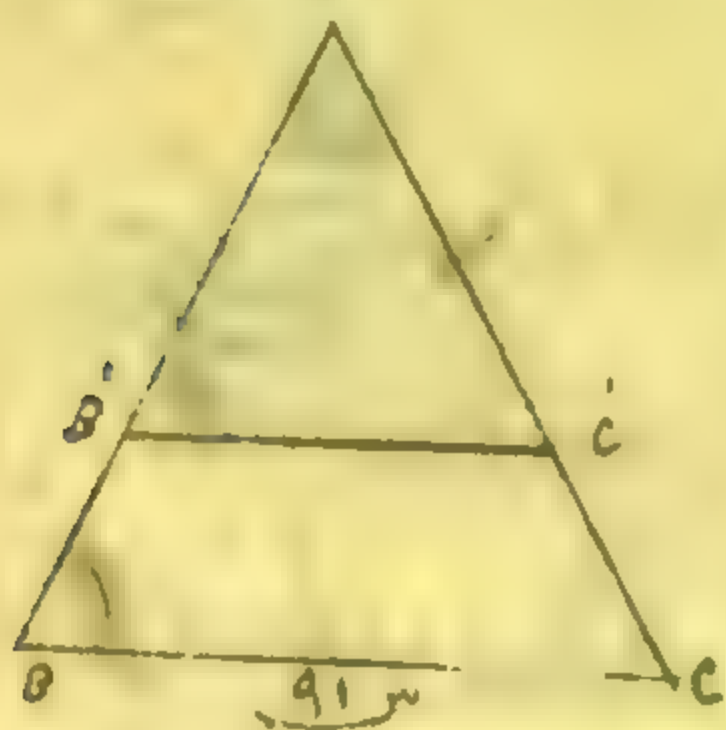


$$\text{ح -} \triangle DEF \sim \triangle ABC$$

ب -  $AB'$  و  $AC'$  را ترتیب مساوی

$DE$  و  $DF$  جدا نموده  $B'C'$  را

وصل میکنیم پس دو مثلث  $ABC'$  و



$DEF$  متساویند (مبنی فرض)

ولهذا  $\hat{B} = \hat{E}$  اما بالفرض  $\hat{E} = \hat{B}$  پس  $\hat{B} = \hat{B}$  و چون این دو زاویه

مقابل داخل و خارجند پس  $B'C' \parallel BC$  و بقیه  $\triangle ABC' \sim \triangle ABC$

لیکن  $\triangle ABC = \triangle DEF$  پس  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  و هوای مطابق

۳۶۳ - قضیه ۷۸ - (حالت دوم) دو مثلث متشابهند

هرگاه در دو ضلع نظیر نظیر متناسب و در زاویه

بینهما مساوی باشند



ف - ۹۱  $\hat{D} = \hat{A}$  و  $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$  - ح

ب - بفرض اینکه  $AB = DE$  و  $AC = DF$  باشد مثلث  $ABC$  با مثلث  $DEF$  مساوی میگردد و بعلاوه از فرض نتیجه میشود  $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$  و لهذا  $BC' \parallel BC$  و به قدری بران تمام شود  
 ۳۶۴ - قضیه ۷۹ - (حالت سوم) دو مثلث متشابهند هرگاه  
 دو ضلع نظیر نظیر متناسب و در زاویه مقابل ضلع اعظم متشابهند  
 ف - ۹۱  $\hat{E} = \hat{B}$  و  $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$  ،  $AC > AB$

ح -  $\triangle DEF \sim \triangle ABC$

مانند سابق  $AB'$  و  $AC'$  را مساوی با  $DE$  و  $DF$  جدا نموده تاوی دو مثلث  $ABC'$  و  $DEF$  و تشابه  
 $ABC$  و  $ABC'$  را ثابت مینمایم

۳۶۵ - قضیه - (حالت چهارم) دو مثلث متشابهند  
 هرگاه سه ضلع نظیر نظیر متناسب باشند

ف - ۹۱  $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$  و  $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$

$$\Delta DEF \sim \Delta ABC \quad \text{ح -}$$

(اقامه برهان برعهده متعلم است)

۲۶۶ - تنبیه - عموماً ممکن است خطوط متناسبه را اضلاع

مثلثات متناسبه قرار داد

۳۶۷ - قضیه ۸۲ - نسبت سطح دو مستطیل مثل

حاصل ضرب دو بعد آنهاست و اگر در یک بعد مشترک

باشند نسبتشان مثل بعد دیگر است

ب - چون بقاعده مساحت مستطیل حاصل ضرب دو بعد آنست نسبت

دو مستطیل که قاعده شان  $a$  و  $a'$  و ارتفاعشان  $b$  و  $b'$

و سطحشان  $s$  و  $s'$  باشد چنین میشود

$$\frac{s}{s'} = \frac{a \cdot b}{a' \cdot b'}$$

حال اگر فرض کنیم مثلاً  $b = b'$  حال  $b$  در صورت و مخرج طرف ثانی

مشترک شده تناسب فوق بعد از اختصار چنین میشود  $\frac{s}{s'} = \frac{a}{a'}$

۳۶۸ - نتیجه - نسبت دو مثلث یا دو متوازی الاضلاع که در قاعده

(یا ارتفاع) مشترک باشند مثل دو ارتفاع (یا دو قاعده) است



۳۶۶ - قضیه ۱۲ - نسبت دو مثلث که در یک زاویه مساوی

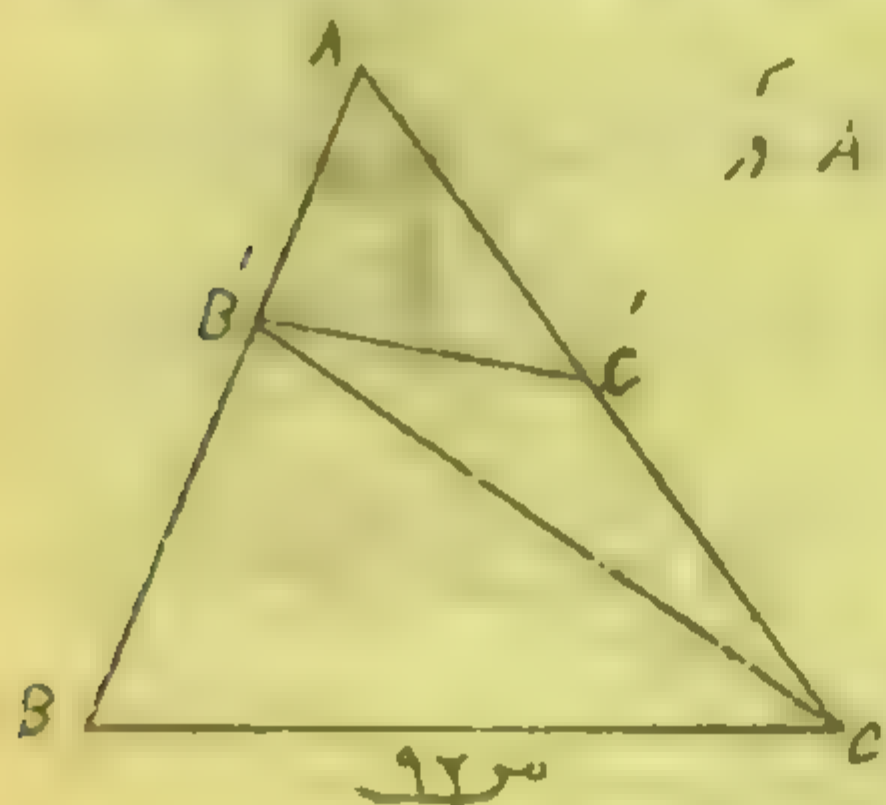
باشند مثل حاصل ضرب دو ضلعی است که حاوی آن زاویه اند

ب - دو مثلث را بقی قرار میدهم که در زاویه مساوی مشترک باشند

و نقطه  $B'$  را نقطه  $C$  وصل کنیم دو مثلث  $ABC$  و  $AB'C$  را ارتفاع

$h_c$  و دو مثلث  $ABC$  و  $AB'C$  را

ارتفاع  $h_c$  مشترک پس



$$\frac{ABC}{AB'C} = \frac{AB}{AB'}$$

$$\text{و } \frac{AB'C}{AB'C'} = \frac{AC}{AC'}$$

از ضرب این دو تساوی حذف عامل مشترک  $AB'C$  از صورت و مخرج

طرف اول حاصل میشود  $\frac{ABC}{AB'C} = \frac{AB \times AC}{AB' \times AC'}$  و بهر مصلحت

۳۷۰ - قضیه ۱۳ - دو مثلث متشابه بر نسبت مربع اضلاع متناظره اند

ب - اگر دو مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  متشابه باشند دو زاویه متناظره

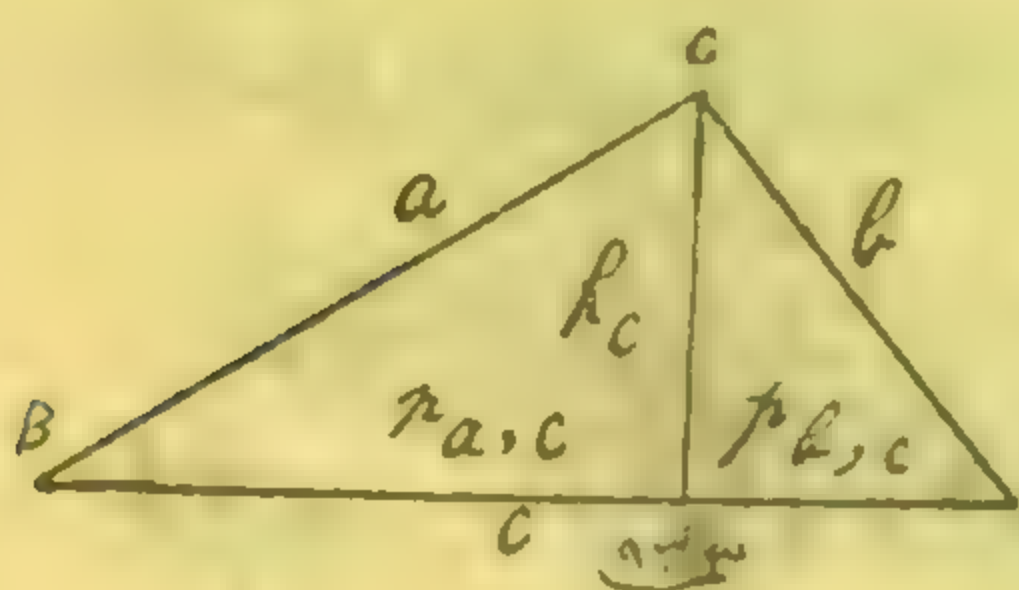
به و به و متساوی میشوند و به قس این تناسب حاصل است

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB \times AC}{A'B' \times A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AC}{A'C'}$$

$$\text{لیکن متشابه دو مثلث } \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$$

$$\frac{ABC}{AB'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AB}{AB} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \text{ پس}$$

بعضی احکام که بتشابه مثلثات راجع میشود  
 ۳۷۱- قضیه ۱۴- هر مثلث قائم الزاویه بواسطه ارتفاع وارد  
 بر وتر بدو مثلث متشابه که با مثلث کل نیز متشابهند تجزیه میشود  
 طریقه برهان- هر یک از دو مثلث جزء در زاویه قائمه با مثلث کل متساوی در زاویه  
 حاده با آن مشترکند ۹۳



۳۷۲- نتیجه ۱- ارتفاع وارد

بر وتر واسطه هندسی است بین

دو قطعه وتر (از تشابه دو مثلث جزء این تناسب صحت دارد)  
 $\left( \frac{p_{a,c}}{h_c} = \frac{h_c}{p_{b,c}} \right)$  قاطعه

۳۷۳- نتیجه ۲- در مثلث قائم الزاویه هر ضلع از زاویه قائمه و  
 هندسی است باین وتر و تصویر همان ضلع بر وتر (از تشابه مثلث جزء

با مثلث کل این تناسب حاصل است ۹۴  
 $\frac{c}{a} = \frac{a}{p_{a,c}}$

۳۷۴- مسئله اصلی- بخواهیم باین دو قطعه a و b واسطه هندسی تعیین کنیم

حل- نیم دایره بقطر a + b رسم نموده از نقطه مشترک بین a و b عمود  
 بر قطر احداث میکنیم تا دایره را تلاقی نماید طول این عمود واسطه هندسی مطلوب است



(نتیجه ۳۷۲)

۳۷۵ - حل ۲ - نیم دایره بقطر  $a$  رسم نموده  $ka$  را از  $a$  تفریق کرده از  
 منتهای  $ka$  عمودی بر قطر خارج می‌کنیم و نقطه تلاقی آنرا با دایره  $a$  و منتهای  $a$  و  
 $ka$  وصل می‌کنیم تا واسطه هندسی معلوب بدست آید (نتیجه ۳۷۲)

۳۷۶ - مسئله اصلی - میخواسیم مابین دو قطعه  $a$  و  $ka$  سوم جزئیات  
 تعیین کنیم (یعنی  $ka$  واسطه هندسی باشد مابین  $a$  و جزر مطلوب)  
 طریق حل - علاوه بر دو خطی که از دو  $a$  و  $ka$  استنباط میشود  
 قضیه اشعه را برای حل مسئله بکار برد

۳۷۷ - قضیه ۸۵ - در مثلثات تشابه جمع خطوط مستطافه  
 از قبیل ارتفاعات و میانه ها و اشعه ها و ایرمخاطیه و امثال آنها  
 متناسب بر نسبت اضلاع

طریق برهان - در هر حال باید تشابه دو مثلث را یکی از حالت  
 تشابه ثابت کرد

۳۷۸ - نتیجه - مثلثات متناسب بر نسبت مربعات خطوط مستطافه  
 خود میباشند

۳۷۹ - قضیه ۸۶ - همواره ممکنست دو کثیر الاضلاع  
متشابه را بواسطه خطوط متناظره مثلاً اقطار آنها بچندین  
مثلث متشابه تجزیه نمود

طریقه برهان - عموماً چنین مثلثات در دو ضلع متناسب در زاویه بین آنها متساویند  
۳۸۰ - قضیه ۸۷ - بالعکس هر دو کثیر الاضلاع که از یک قاعده مثلثات  
متشابه متشابه الوضوع مرکب باشند متشابهند

طریقه برهان - از تساوی زوایای مثلثات بواسطه جمع تساوی  
زوایای دو کثیر الاضلاع و از تناسب اضلاع مثلثات تناسب  
اضلاع دو کثیر الاضلاع نتیجه میشود

۳۸۱ - قضیه ۸۸ - در دو کثیر الاضلاع متشابه  
دو محیط بر نسبت دو ضلع یا دو خط متناظره دو و دو  
بر نسبت مربعات همان خطوط است

طریقه برهان - چون در شب متساوی نسبت مجموع مقدمات  
مجموع توالی مثل یکی از نسبتهای مفروضه است اثبات قضیه ترکیب  
نسبت راجع میشود



# تمرینات

۱- مطلوب است اثبات احکام ذیل

۱- هرگاه اضلاع دو مثلث متوازی یا همسود بر یکدیگر باشند آن دو مثلث

متشابه میشوند

۲- هرگاه اضلاع مستناظره دو مثلث یا دو کثیرالاضلاع متشابه متوازی باشند

خطوط وصل مابین رؤس مستناظره بر یک نقطه تقاطع میکنند

۳- در دایره هر وتر واسطه هندی است مابین قطر و تصویر همان وتر بر

قطری که بیک طرف آن می‌درکند

۴- در دایره مربع هر دو وتر چهار برابر سطح دو قطعه قمریت که بر آن وتر عمود باشد

۵- شعاع دایره واسطه هندی است مابین دو قطعه مماسی که بواسطه

دو مماس متوازی محدد شده باشد (مبدأ دو قطعه مماس

نقطه تماس است)

ب- مسائل ذیل را حل نمائید

مسئله ۱- میخوایم ششای رسم کنیم که وسطش نسبت به مثلث مفروض



$\frac{m}{n}$  و معلومات ذیل از آن مثلث در دست باشد

اولاً -  $a$  و  $b$  چون سمت شش معلوم است بوسید  $a$  ارتفاع  $h_a$  را معلوم میکنیم و بوسید  $b$  نصف محیط هر دایره آن را  $a - r$  را حاصل مینماییم و پس از آن چون دو مماس بر دایره شعاع  $r$  بطول  $a - r$  رسم کنیم زاویه بین آنها  $\theta$  خواهد بود

ثانیاً -  $a$  و  $k_a$  ثابت  $a$ ،  $k_e$  را بنا به  $k_e$  و  $k_c$  میانه  $\rho$

۲- شش از معادلات ذیل رسم کنید  $a$  و  $\frac{k_a}{k_e} = \frac{m}{n}$

$C : m : \alpha : \beta : \gamma$

طریقه حل - چون در مثلث  $ABC$  عمود  $CD$  را از نقطه  $C$  بر  $BC$  و عمود  $AD$  را از نقطه  $A$  بر  $AC$  اخراج کنیم مثلاً به مثلث

این تناسب حاصل است

$$\frac{CD}{a} = \frac{b}{b_1} = \frac{m}{n}$$



# فصل سوم

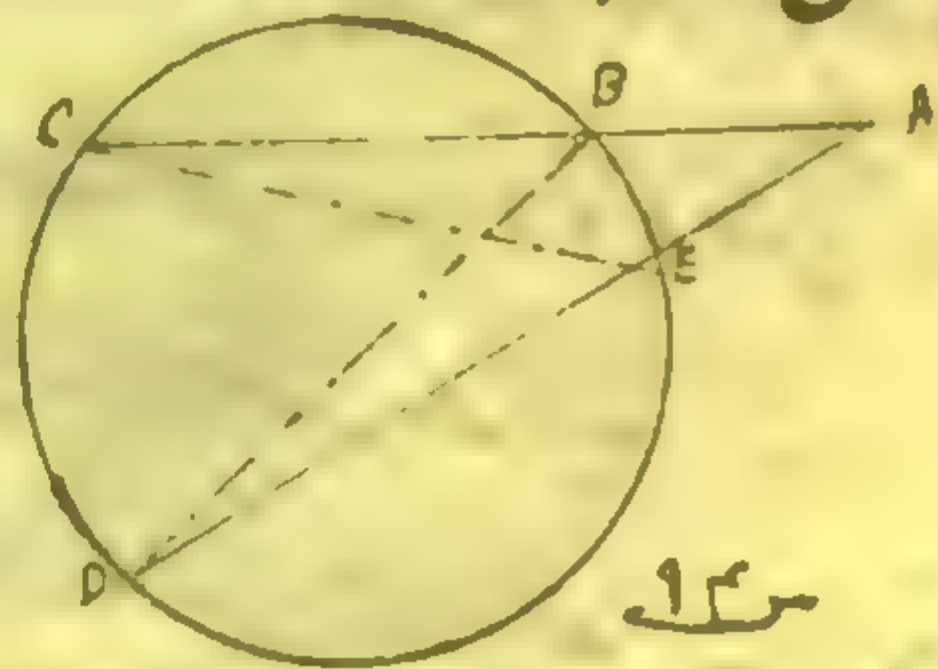
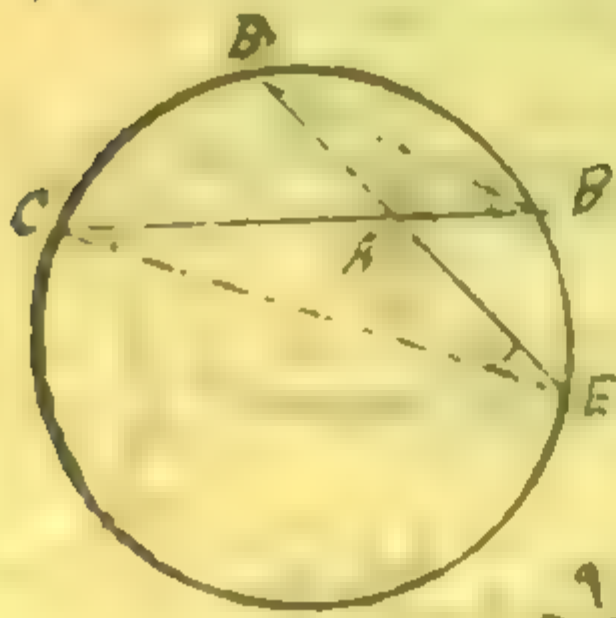
استعمال تشابه اشکال در دایره

۱- اوتار و مماس - قوت نقطه

۳۸۱- قضیه ۸۹- چون دو وتر در داخل

یا خارج دایره تقاطع کند سطح دو قطعه هریک  
مساوی است با سطح دو قطعه دیگری

برهان - چون دو خط  $BD$  و  $EC$  بر اوصل نمایم



از تشابه دو مثلث  $AEC$  و  $ADB$  که در دو زاویه نظیر نظیر متساویند اینها

تناسب حاصلت  $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$  که از ضرب طرفین آن در  $AE \times AC$

نتیجه میشود  $AB \times AC = AD \times AE$  و هوالمطلوب

۳۸۲- قضیه ۹۰- هرگاه از نقطه مفروضه مماس و طبیعی

بر دایره معنه وضع رسم کنیم هائس واسطه هندسی است  
 مابین تمام قاطع و قطعه خارجی آن

طریقه برهان - چون هائس را قاطعی بداریم که داخل و منحرفش بر یکدیگر  
 منطبق باشند این قضیه حالت خاصی از قضیه سابق گردیده محقق میشود

( ممکن است مستقلا حکم را بر اسطه ثاب و دوشئت اثبات نمود )

۳۸۴ - نتیجه - از دو قضیه فوق معلوم میشود که در دایره معنه وضع

مسطح دو قطعه او تار یک بر نقطه ثابتی در مرکز تغییر ناپذیر است .

۳۸۵ - تعریف - سطح دو قطعه و تراخواه تقسیم اضافی و خواه تقسیم نقصانی

یعنی خواه نقطه تقسیم که همان نقطه تقاطع است در داخل دایره و خواه در خارج آن

باشد قوت نقطه تقاطع نسبت به دایره معنه وضع گویند

۳۸۶ - از تعریف فوق و نتیجه ۳۸۴ معلوم میشود که هر نقطه نسبت به دایره

مفروضه قوت معینی دارد که تابع حکم ذیل است

فرع - چون فاصله نقطه معنه وضع را از مرکز دایره  $d$  و شعاع دایره را

$r$  فرض کنیم قوت نقطه عبارت از  $d^2 - r^2$  نموده میشود پس اگر نقطه

مفروضه در خارج دایره باشد قوت آن مثبت است و اگر نقطه بر محیط دایره



شود قوت آن صفر است و اگر در درون دایره واقع شود قوت آن منفی است  
در صورت اول قوت نقطه مربع مماسی است که از نقطه مماس بر دایره رسم  
شود و در صورت اخیر قوت در مطلق قوت ربع مربع و تری است که بر قطر  
نقطه مماس و عمود باشد و واضح است که چون نقطه بر مرکز دایره واقع شود  
قوت آن نامر - خواهد بود

۳۸۷ - قضیه ۹۱ - هرگاه بر دو خط مستقیم چهار نقطه  
چنان فرض کنیم که سطح دو قطعه هر یک متعادل با سطح دو قطعه  
دیگری باشد نقاط مفروضه بر محیط یک دایره واقعند

طریقه برهان - این قضیه که عکس قضیه است برهان خلف ثابت میشود  
قضیه ۹۲ - عکس قضیه ۹۱ نیز صحیح است (اثبات برهان خلف بر مضمون است)

## ب - محور اصلی دو دایره

۳۸۸ - تعریف - مکان هندسی نقاطی که نسبت بدو دایره مفروضه

متحد القوه باشند به محور اصلی آن دو دایره موسوم است

۳۸۹ - قضیه ۹۳ - محور اصلی دو دایره خطی است

عمود بر خط المרכזین

بر مان - فرض کنیم  $A$  است نقطه از محور اصلی دو دایره  $(x)$  و  $(M)$  و  $(x')$  باشد چون بالسنه فرض این نقطه نسبت به دو دایره متحد القواست این تساوی حاصل میگردد

$$AM^2 - x^2 = A'M'^2 - x'^2$$

لیکن چون  $AP$  را بر  $MM'$  عمود کنیم به ق

$$AM^2 = AP^2 + PM^2$$

$$AM'^2 = AP^2 + PM'^2$$

$$AP^2 + PM^2 - x^2 = AP^2 + PM'^2 - x'^2$$

$$(1) \quad PM - PM' = \frac{x^2 - x'^2}{2x}$$

$$(2) \quad PM + PM' = MM' = a$$

و چون رابطه (۱) را بر رابطه (۲) تقسیم کنیم معلوم میشود که

$$(3) \quad PM - PM' = \frac{x^2 - x'^2}{a}$$

حال از جمع دو رابطه (۲) و (۳) بعد از تجزیه و تقسیم

طرفین بر (۲) نتیجه میشود

$$PM = \frac{x^2 - x'^2 + a^2}{2a}$$



از این رابط آشکار است که نقطه  $P$  بر خط المکزین محل ثابتی دارد زیرا فاصله آن  
از نقطه  $m$  یعنی کسر  $\frac{a^2 - x^2}{2a}$  مقدار ثابت پس جمیع نقاط متی تقوه  
مانند  $A$  بر عمودی واقعند که از نقطه معین  $P$  بر خط المکزین اخراج شود و بصافه

آخری این عمود مکان هندسی نقاط مزبور و بنا بر این محور اصلی است

نتیجه ۱ - محور اصلی مانهای مشترک را نصف میکند

نتیجه ۲ - در دو دایره مانس محور اصلی مانس مشترکی است

که بر نقطه تماس میگذرد

نتیجه ۳ - در دو دایره متقاطع وتر مشترک محور اصلی است

۳۹۱ - قضیه ۹۴ - محور اصلی سه دایره بر یک نقطه تقاطع

میکنند که بر مرکز اصلی سه دایره موسوم است

بر مان - فرض میکنیم محور اصلی دو دایره  $(m و n)$  و  $(x و y)$  با محور

اصلی دو دایره  $(x و y)$  و  $(m و n)$  بر نقطه  $O$  تقاطع کند این نقطه

نسبت بهره دایره تحت القوه خواهد بود و بنا بر این بر محور اصلی دو دایره

$(x و y)$  و  $(m و n)$  واقع میشود

نتیجه ۱ - سه دایره متقاطع بر یک نقطه تقاطع میکنند

نتیجه ۲ - در دایره تماس سه مماس متوالی که برافت ناماس  
میگذرند متساوی اند

نتیجه ۳ - مرکز اصلی سه دایره که مرکزشان بر یک استقامت است  
بفاصله بینهایت است (محورهای اصلی موازی اند)

## مزیات

مسئله ۱ - میخواهیم از مرکز  $B$  منتهای قطعه  $AB$  دایره رسم کنیم که قوت

نقطه  $A$  نسبت بدان مقدار معلوم  $\ell$  باشد

طریقه حل - از رابطه  $\ell^2 = A\bar{B} - A\bar{B}$  معلوم میشود که هر ضلع

مشتقی است قائم الزاویه که وترش  $\ell$  و ضلع دیگرش  $AB$  باشد

مسئله ۲ - میخواهیم بر دو نقطه منتهای  $A$  و  $B$  دایره مورد رسم

که با خط منتهای  $CD$  مماس شود

طریقه حل - امتداد  $AB$  خط  $CD$  را بنقطه مانند  $C$  قطع میکند

که قوت آن نسبت بدایره مطلوب  $CA \times CB$  معلوم است پس اگر  $D$  نقطه تماس باشد

$CD$  واسطه همت می مابین  $CA$  و  $CB$  خواهد بود (بحث مسدود

تحقیق حالتیکه  $AB \parallel CD$  باشد بر مضمون است)

مسئله ۳ - میخوایم محور اصلی دو دایره غیر متقاطع را رسم کنیم  
حل - دایره اشتیاری چنان مرور می‌دهیم که دو دایره منفرجه را قطع کند و از نقطه

قاطع دو دایره مشترک که مرکز اصلی است عبور می‌دهیم بر خط الم مرکزین منفرجه و می‌آید بر یک مرکز  
مسئله ۴ - میخوایم بر دو نقطه  $A$  و  $B$  دایره مرور دهیم که با دایره منفرجه تماس کند

طریقه حل - بر دو نقطه  $A$  و  $B$  دایره مرور می‌دهیم که دایره منفرجه را قطع کند و

دایره مشترک  $AB$  و  $CD$  بر مرکز اصلی این دو دایره متمایل می‌گردد پس چون

از نقطه تقاطع آنها مای بر دایره منفرجه رسم کنیم نقطه تماس دو دایره بر

محیط دایره منفرجه معلوم شود و جواب سه دایره است که بر آن نقطه

و دو نقطه  $A$  و  $B$  مرور دهیم ۱ عمود و جواب

ج - قضیه بطلیموس و نیاز آن  
۳۹۳ - قضیه ۹۵ - در هر ذو اربعة اضلاع محاطی  
سطح دو قطر معادل است با مجموع دو سطح بر دو  
ضلع مقابل (قضیه بطلیموس)

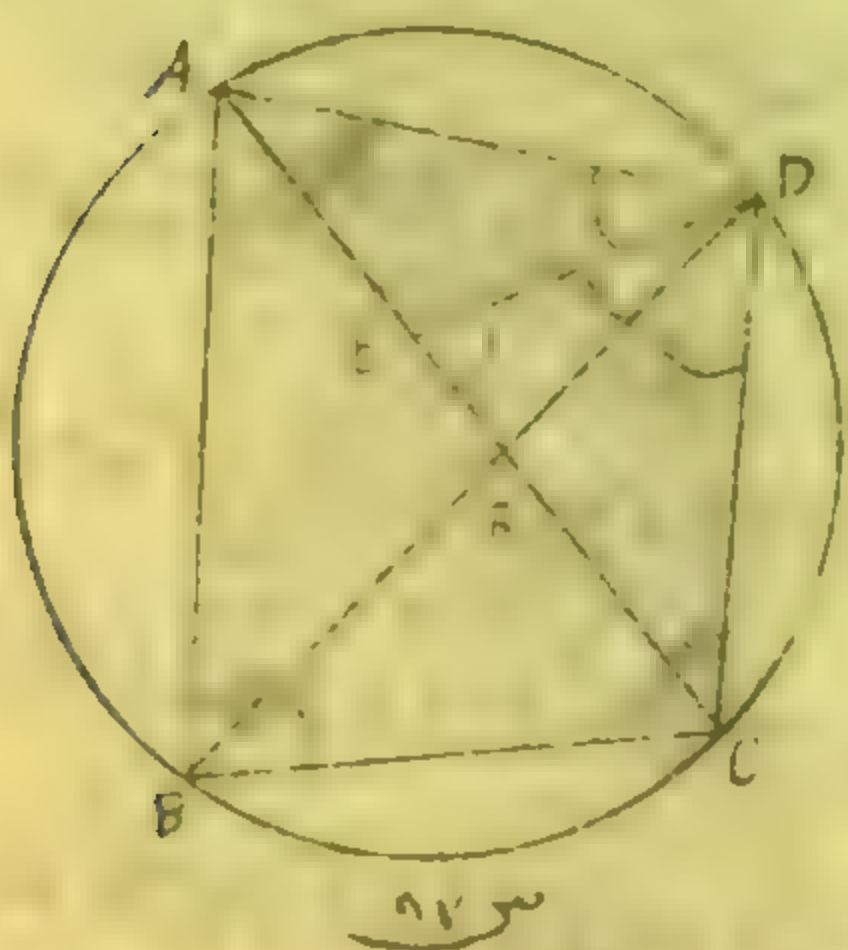
برهان - فرض می‌کنیم  $ABCD$  سطح ذو اربعة اضلاع محاطی منفرجه  
باشد چون دو قطر را وصل نموده و زاویه  $ADE$  را زاویه  $BDC$



(۱۷۲) (۱۷۳) (۱۷۴)

(۱۷۲)

جدا کنیم چون  $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$  و مثلث  $ADE$  و  $BDC$  متشابهند  
و همچنین دو مثلث  $CDE$  و  $BDA$  متشابهند (بچه دلیل) پس



اولاً  $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BC}$

ثانیاً  $\frac{DC}{BD} = \frac{EC}{AD}$

یا اولاً  $AD \times BC = BD \times AE$

و ثانیاً  $DC \times AB = BD \times EC$

از جمیع دو تساوی اخیر حاصل میشود

$$AD \times BC + AB \times DC = BD \times EC = BD(AE + EC) = BD \times AC$$

۲۹۴ - اگر  $BD$  بر قطر دایره منطبق باشد (بر مرکز بگذرد)  $DE$  بر  $AC$  عمود میشود

(بچه دلیل؟) و بنا بر این ارتفاع مثلث  $ADC$  خواهد بود اما متشابه دو مثلث

یعنی  $\frac{AD}{BD} = \frac{ED}{DC}$  این تناسب حاصلست  $ADE$  و  $BDC$

و لهذا قضیه ذیل محقق است  $AD \times DC = BD \times DE$

قضیه ۹۶ - در هر مثلث مسطح دو ضلع متعادل است

با مسطح قطر دایره محیطیه در ارتفاع نظیر ضلع سوم

یعنی  $ab = r^2 - r_a^2$  (و  $ac = r^2 - r_b^2$ ،  $bc = r^2 - r_c^2$ )

۳۹۵- نتیجه - چون طرفین تا دی فوق را در  $c$  ضرب نمایم چنین میشود

$$a b c = 2 r c \quad \text{چون } a b c = 2 r c \quad \text{ضرب مساحت مثلث است حاصل کرد}$$

$$a b c = 4 r s \quad \text{که از آن استخراج میکنیم}$$

$$r = \frac{a b c}{4 s} \quad \text{یا} \quad r = \frac{a b c}{4 r}$$

چون مساحت مثلث را بحسب اضلاع میدانیم بوسیله رابطه اخیر ممکنست  $r$  را

بحسب اضلاع حساب کرد

$$r = \frac{a b c}{4 \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

۳۹۶- قضیه ۹۷- در هر مثلث مربع منصف الزاویه معاد

با فصل مستطی و ضلع حاوی آن بر مستطی و قطع ضلع سوم

بر همان - اگر در شکل سابق  $AC$  منصف زاویه  $BAD$  باشد و مثلث

$$ABC \text{ و } AFD \text{ متشابه میشوند پس } \frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AD} \text{ و لهذا}$$

$$AB \cdot AD = AF \cdot AC = AF(AF + FC) = AF^2 + AF \cdot FC$$

لیکن به قوت ۹۹  $AF \times FC = DF \times BF$  و بنا بر این رابطه فوق چنین میشود

$$AB \cdot AD = AF^2 + DF \cdot BF$$

که از آن نتیجه میگردد  $AF^2 = AB \cdot AD - DF \cdot BF$

۳۹۷- مسئله - ضلع مستثنی معلوم است میخواهیم به نصف آن

آن را حساب کنیم

حل - فرض میکنیم  $v$  ضلع  $a$  را بدو قطعه  $a_1$  و  $a_2$  منقسم نماید پس بقضیه

فوق این معادله حاصل است

$$v_a^2 = bc - a_1 \cdot a_2$$

ولی بقضیه ۱۷۴  $\frac{ab}{a_2} = \frac{b}{c}$  یا ترکیب  $\frac{bc}{c} = \frac{a_2 b}{a}$  چون  $a_1 + a_2 = a$

از تساوی اخیر مقدار  $a_2$  معلوم شود  $a_2 = \frac{ac}{b+c}$  و بهین طریق معلوم

میکنیم که  $a_1 = \frac{ab}{b+c}$  و بنابراین

$$v_a^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}$$

$$v_a^2 = \frac{bc(b+c) - a^2 bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)} [(b+c) - a^2]$$

$$(b+c) - a^2 = (a+b+c)(b+c-a) = 4p(p-a)$$

$$v_a^2 = \frac{4bc p (p-a)}{(b+c)^2} \quad \text{بنابراین}$$

$$v_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bc p (p-a)} \quad \text{یعنی}$$

و تبدیل  $a$  به  $b$  یا  $c$  معلوم میشود

$$v_b = \frac{2}{a+c} \sqrt{ac p (p-b)} \quad v_c = \frac{2}{a+b} \sqrt{ab p (p-c)}$$



## در نسبت ذات وسط و طرفین

۳۹۸ - تقریبت - هرگاه نقطه  $C$  قطع  $AB$  را بر دو جز  $BC$  و  $AC$  بقسمی مجزئی نموده باشد که جزو  $AC$  واسطه بندی  $AB$  و  $BC$  باشد گویند  $AB$  بر نسبت ذات وسط و طرفین (ذوط) تقسیم شده

۳۹۹ - مسأله - میخواهیم قطع  $AB$  را بر نسبت ذات

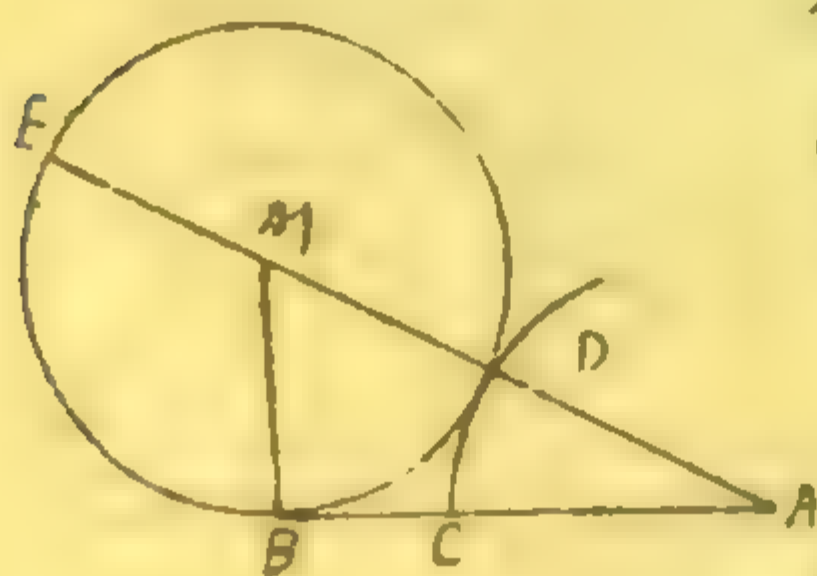
وسط و طرفین تقسیم کنیم

رسم - بر نقطه  $B$  عمودی بطول  $\frac{AB}{۲}$  خارج نموده از مرکز  $M$  به  $A$  به  $MB = \frac{AB}{۲}$

دایره رسم میکنیم که بر نقطه  $B$  مماس شود و  $AM$  را بر نقطه  $D$  و  $E$

قطع میکند حال چون  $AD$  را بوسید قوس  $DC$  بر  $AB$  نقش میکنیم  $AB$

بر نقطه  $C$  به نسبت ذوط تقسیم شود  
برهان - به قضیه ۹۲ این تناسب حاصل



$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD}$$

یا بتفصیل نسبت

$$\frac{AE - AB}{AB} = \frac{AB - AD}{AD}$$

مس ۹۸

دل چون شعاع دایره  $\frac{AB}{۲}$  است  $DE = AB$

و بنابراین  $AE - AB = AE - DE = AD = AC$

و بعلاوه  $AD = AC$  و  $AB - AD = AB - AC = BC$

پس تناسب فوق چنین میشود  $\frac{AC}{CB} = \frac{BC}{AC}$  و هو المطلوب

۴- مسئله - مطلوبست محاسبه دو جز  $AR$  که نسبت ذوط تقریبی

حل - از صورت ظاهر است که

$$AC = AD = AM - MD = AM - \frac{AB}{2}$$

لیکن از مثلث قائم الزاویه  $AMB$  حاصل میگردد

$$AM^2 = AB^2 + MB^2 = AB^2 + \frac{AB^2}{4} = \frac{5AB^2}{4}$$

$$AM = \sqrt{\frac{5AB^2}{4}} = \frac{AB}{2} \sqrt{5}$$

$$AC = \frac{AB}{2} \sqrt{5} - \frac{AB}{2} = \frac{AB}{2} (\sqrt{5} - 1)$$

چون نمیتوانیم از  $AB$  تقریب کنیم بعد از اختصارات لازم نمیشود

$BC$  چنین بدست میآید

$$BC = \frac{AB}{2} (3 - \sqrt{5})$$

تنبیه - تقسیم بر نسبت ذوط تقسیم نقصانی نمیشود مگر این است

و کافی است که بعضی نقل  $AD$  بر  $AB$  نقطه  $E$  را برآورد

$BA$  نقل کنند (تنبیه صحت تقسیم بر عدد متعین است)

# کتاب چهارم - کثیر الاضلاع مستطمن و مستطمنه

## فصل اول - کثیر الاضلاع مستطمن

### ۱ - اشکال مستطمن محیطی و محاطی در دایره

۴۰۱ - تعریف - کثیر الاضلاع مستطمن شکلی است که جمیع اضلاعش

متساوی و جمیع زوایایش متساوی باشند

۴۰۲ - قضیه ۹۱ - هر کثیر الاضلاع مستطمن قابل محیط شدن

بر دایره و محاط شدن در آن است و عبارت دیگر هر

کثیر الاضلاع مستطمن را یک دایره محیطی و یک دایره محاطی است

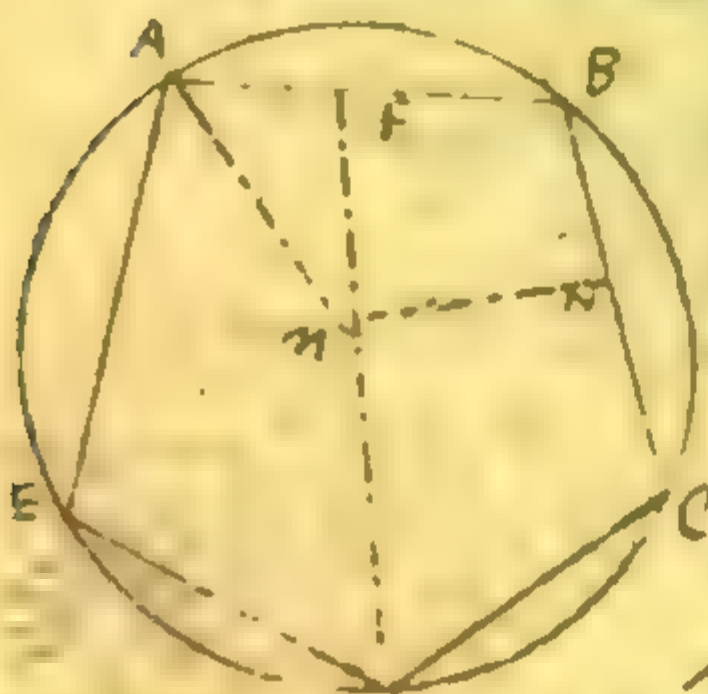
برهان - اولاً فرض کنیم  $M$  سو ۹۹ نقطه تلاقی دو عمود منصف  $AB$  و

$BC$  که دو ضلع کثیر الاضلاع باشند و آنجا جمیع رؤس کثیر الاضلاع وصل میکنیم چنانکه از سابق

میدانیم نقطه  $M$  از سه نقطه  $A$  و  $B$  و  $C$  یک فاصله است

بمسئله چنانکه از انطباق واضح میشود

دو دایره  $ABHM$  و  $DCHEM$



متساویند زیرا  $BHM = CHM$  و  $MH = MH$  سو ۲



و  $BH = CH$  و  $\hat{B} = \hat{C}$  و  $AB = DC$  پس  $MA = MD$  و همین طریق معلوم می شود که نقطه  $M$  از سایر رؤس نیز بیفاصله  $MA$  قسمت کند دایره که از مرکز  $M$  باشد شعاع  $MA$  رسم شود بر حسب رؤس کثیر الاضلاع مورد نموده بر آن محیط می شود ثانیاً چون اضلاع کثیر الاضلاع اوتار متساویه از دایره محیطی می شود لذا مرکز دایره  $M$  نقطه سلفی است و بنا بر این دایره از مرکز  $M$  شعاع  $MM$  رسم شود با جمع اضلاع می شود کثیر الاضلاع محیط می گردد

۴۰۳ - تعریف - مرکز مشترک دو دایره محیطی و محاطی را مرکز کثیر الاضلاع گویند شعاع دایره محیطی را شعاع و شعاع دایره محاطی را ارتفاع کثیر الاضلاع می نامند زاویه مرکزی کثیر الاضلاع زاویه است که مابین دو شعاع متوالی یا دو ارتفاع متوالی آن حادث می گردد

۴۰۴ - نتیجه - چون زوایای مرکزی کثیر الاضلاع مستطیم متساویند اگر عدد اضلاع را  $n$  فرض کنیم مقدار هر زاویه مرکزی  $\frac{360}{n}$  قائم خواهد بود

۴۰۵ - قضیه ۹۹ - چون محیط دایره را برابر اجزاء متساویه قسمت کنیم و نقاط تقسیم را وصل نماییم کثیر الاضلاع محاطی حاصل مستطیم است و اگر بر نقاط تقسیم خطوط مماس کنیم کثیر الاضلاع محیطی منتظمی تشکیل می شود

برهان - برای اثبات جزو اول قضیه مرکز را بنقاط تقسیم وصل نموده بملاحظه

تساوی اوتار تساوی مثلثات تساوی التاقین استنباط میکنیم ضمن معلوم شود  
که اشعه زوایای کثیر الاضلاع را نصف میکنند

برای اثبات جزء دوم علاوه بر تساوی اوتار ملاحظه میکنیم که زوایای بین ماسها  
اوتار همه تساویند

۴۰۶ - فرع - اگر ماسها بموازات اوتار مرسومه رسم کنیم باز کثیر الاضلاع  
منتظم محیطی حاصل میگردد

ب - تقسیم محیط دایره بدو کار و ستاره  
۴۰۷ - مسئله ۱ - میخواهیم در دایره شعاع هر مرتبه محیطی محاط نموده ابروی مختلفه رسم کنیم  
حل - اولاً چون زاویه مرکزی ۹۰ درجه است کافی است در دایره دو قطر عمود یکدیگر رسم کنیم  
تا دس مربع بدست آید (محیط بر ۴ جزء مساوی منتظم کرد) ثانیاً چون ضلع مربع را ۴ قسمت  
کنیم مثلاً که از دوصل طرفین آن مرکز حاصل میشود قائم الزاویه و تساوی التاقین است پس معلوم

$$\text{میشود که } ۲r = r^2 + r^2 = r^2 \text{ یعنی } r = \sqrt{۲}r \quad C_4 = r$$

$$\text{محیط مربع را } P_4 \text{ فرض میکنیم پس } P_4 = ۴r \sqrt{۲}$$

$$\text{ارتفاع مربع را } H_4 \text{ فرض میکنیم ثابت کنید که } H_4 = \frac{r}{۲} \sqrt{۲}$$

$$\text{مساحت مربع را } S_4 \text{ و سینمایم } S_4 = ۲r^2$$

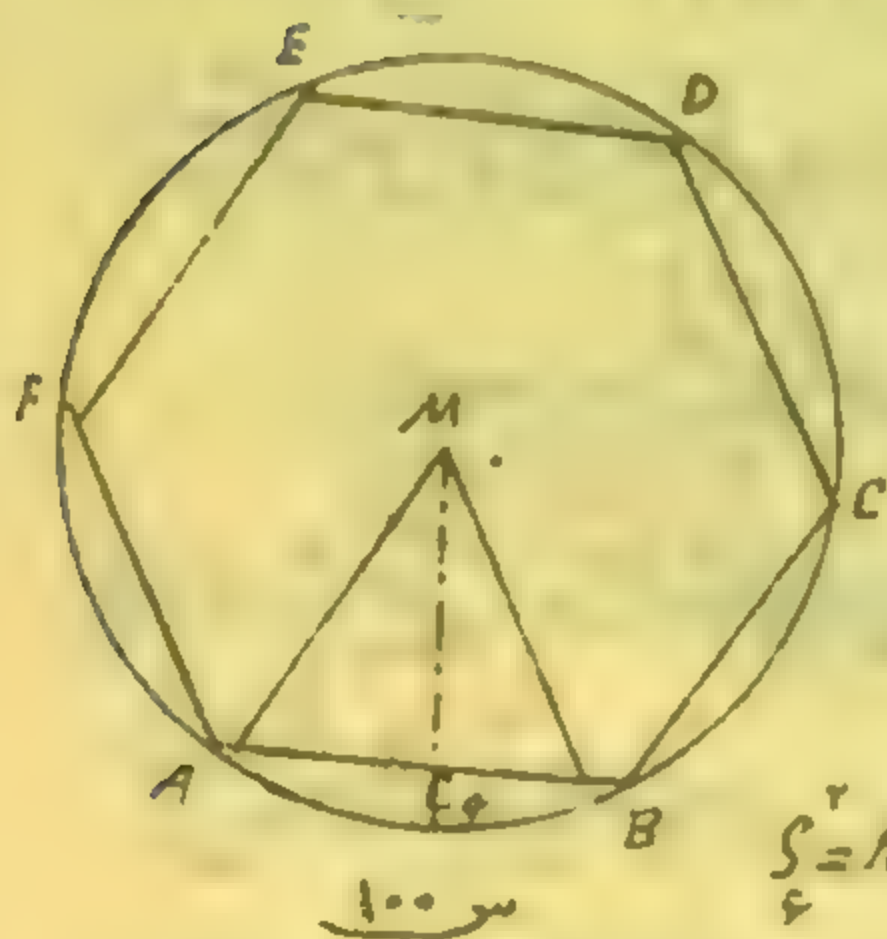
۴۰۸- مسئله ۲- میخائیم در دایره شعاع  $r$  مندرق منظمی محاط نموده اجزاء آن را حساب کنیم

حل- سو ۱- اولاً اگر  $AB$  ضلع مندرق باشد  $\widehat{AMB}$  کس  $4$  قائمه یعنی  $90^\circ$

خواهد بود و چون مثلث  $AMB$  متساوی الساقین است هر یک از دو زاویه  $A$  و  $B$

نیز  $45^\circ$  است لکن مثلث  $AMB$  متساوی الاضلاع است یعنی ضلع مندرق مساوی

باشعاع است



پس برای رسم مندرق کافیت فتحه پررأسی

شعاع نموده قوسهای مساوی از محیط بیدیم بنیای را بر آنچه در

مثلث قائم الزام  $MAG$   $\angle C = 60^\circ$  و  $\angle A = 60^\circ$  پس اما از قائم الزام  $MAG$

نتیجه میشود  $\frac{r^2}{4} = \frac{s^2}{3} \Rightarrow s = \frac{r\sqrt{3}}{2}$   $s^2 = MG^2 = r^2 - (\frac{r}{2})^2 = \frac{3}{4}r^2$

پس  $s = \frac{r\sqrt{3}}{2}$  و بنابراین  $s = \frac{r\sqrt{3}}{2}$   $\Delta AMB = \frac{1}{2} \times s \times \frac{s\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{16}r^2$

۴۰۹- مسئله ۳- میخائیم در دایره شعاع  $r$  مندرق منظمی محاط نموده اجزاء آن را حساب کنیم

حل- اولاً اگر  $AB$  ضلع مندرق باشد  $\widehat{AMB}$  که زاویه مرکزی است  $120^\circ$  یعنی  $2 \times 60^\circ$

$60^\circ$  خواهد بود و لکن هر یک از دو زاویه  $A$  و  $B$  از مثلث متساوی الساقین

$AMB$   $72^\circ$  میشود حال اگر زاویه  $A$  را بنحواً  $AC$  نصف کنیم مثلث  $ACB$

نیز مثلثی متساوی الساقین میگردد که زاویه رأس آن  $\widehat{BAC}$  مساوی  $120^\circ$  است

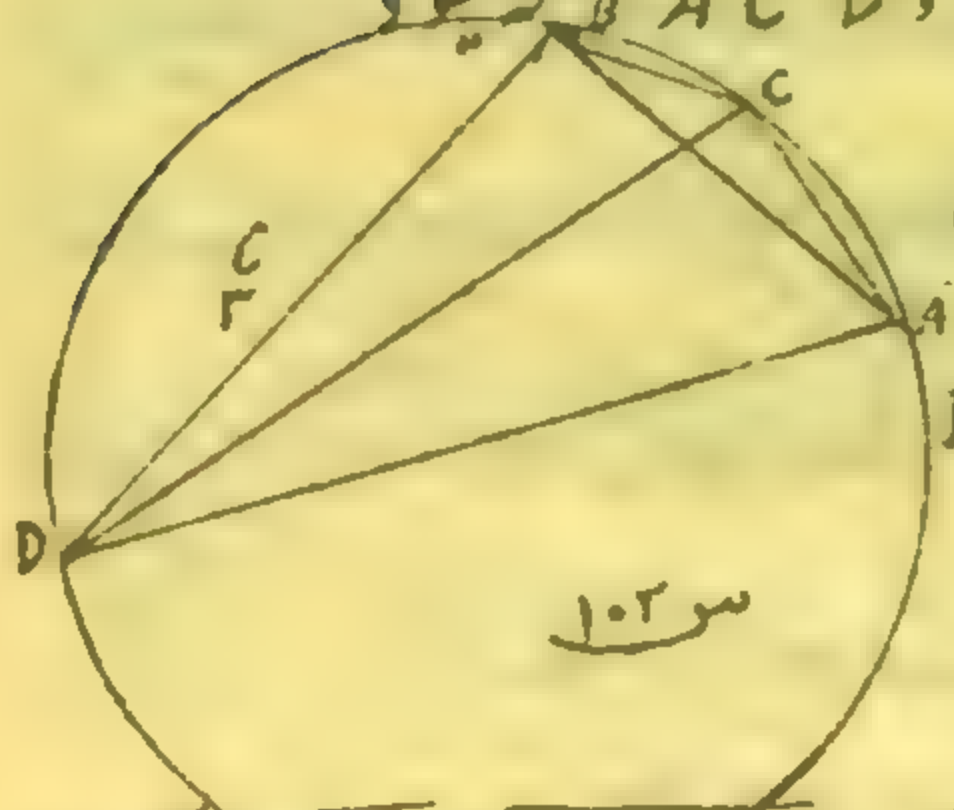




از نقطه A سو ۱۰۲ مغروضه بر محیط دو قوس AB و AC را در یکجهت بترقیب سای  
 $\frac{1}{6}$  و  $\frac{1}{10}$  محیط نقل کنیم BC ضلع پانزده ضلعی است  
 ثانیاً چون قطر AD و دو وتر DB و DC را وصل کنیم بقضیه مطلوبیوس حاصل میشود

$$BC \times AD = AB \times CD - AC \times BD$$

لیکن از دو مثلث قائم الزاویه ABD و ACD منتهی میشود



$$CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{4^2 - 3^2}$$

$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{4^2 - \frac{1}{6}^2}$$

$$BC = \frac{1}{15}$$

رابطه فوق بعد از جمع اختصار این میشود

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{4} (\sqrt{3} + \sqrt{10} + 2\sqrt{5} - \sqrt{15})$$

۴۱۱- تنبیه ۱- چون روس منس و مشترکات تجلی وصل کنیم مثلث و محس می طلی

حاصل میگردد که محاسبه ضلع آنها بر عده متعلم است

۴۱۲- تنبیه ۲- چون تقصیف قوس بوسید بر کار و ستاره ممکن است

معلوم میشود که از روی کشیر الاضلاع در ضلعی میتوان کشیر الاضلاع در ۲ ضلعی

در دایره محاط نمود پس بعد ۴ مسدود فوق چهار قسم کشیر الاضلاع منقسم میشود

با پرکار و ستاره در دایره محاط در رسم نمود

اولاً - مربع و مثلث و ۱ ضلعی و ۳۲ ضلعی و ... ۲ ضلعی

ثانیاً - مثلث و ۱ ضلعی و ۱۲ ضلعی و ۲۴ ضلعی و ... ۲۰ × ۳ ضلعی

ثالثاً - مثلث و ۲۰ ضلعی و ۴۰ ضلعی و ... ۲۰ × ۵ ضلعی

رابعاً - ۱۵ ضلعی و ۳۰ ضلعی و ۶۰ ضلعی و ... ۲۰ × ۵ × ۳ ضلعی

۴۱۳ - تنبیه ۳ - در اینجا چندین تصور میشد که ارقام کثیر الاضلاعهای منظم که میتوان با پرکار و ستاره در دایره محاط نمود سخنر چهار قسم فوق است لیکن کوس (و دستاره) هندس بزرگ و معروف مکانی ثابت کرد که بعد از این دو آلت ممکنست کثیر الاضلاعها در دایره محاط نمود که عدد اضلاعشان  $2^n + 1$  باشد بشرطیکه عدد  $2^n + 1$  فرد اول باشد لیکن برای سایر اعداد فرد محال است

چون در دستور کوس بجای  $n$  اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ قرار دیم عدد ۳ و ۵ و ۷ و ۱۷ و ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ و ۴۲۹۴۹۶۷۱ حاصل میگردد پس بوسیله پرکار ممکنست در این ابر ۳ و ۵ و ۷ و ۱۷ و ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ و ۴۲۹۴۹۶۷۱ جزو قشادی منقسم ساخت اعداد یکبارا  $7 و 6 و 5 = n$  حاصل شود عدد اول نیستند

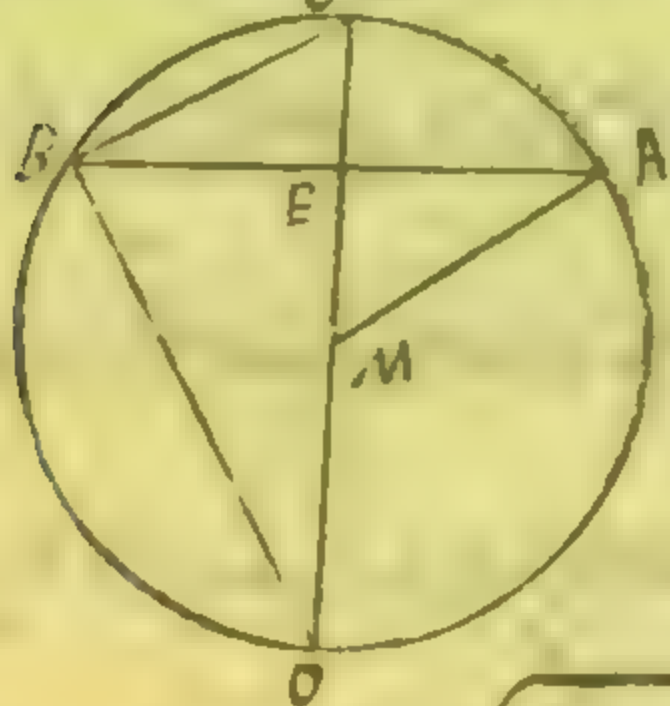
(ذکر این مسائل محتاج مقدمات عدیده است که مقام مناسب ايراد آنهاست)

۴۱۴ - مسئله ۵ - ضلع کثیر الاضلاع  $n$  ضلعی  $n$  شعاع دایره محیطی  $r$  معلوم



میخواهیم  $C$  را معلوم کنیم

حل - فرض میکنیم  $AB$  مساحت ضلع کثیر الاضلاع مفروض باشد  $ME = P$   
ارتفاع آن پس  $C$  که تصویر  $BC$  (یعنی  $\frac{C}{2}$ ) بر شعاع  $MC$  است مساوی



$2 - P$  خواهد بود و در نتیجه

$$CB^2 = CD \times CE$$

یعنی  $\frac{C^2}{2} = 2(2 - P)$

پس  $C = \sqrt{2(2 - P)}$

اما بقضیه عروس مقدار  $P$  چنین است  $P = \frac{1}{2} \sqrt{4 - C^2}$

ولهذا  $\frac{C}{2} = \sqrt{2(2 - \frac{1}{2} \sqrt{4 - C^2})}$

مثال ۱ -  $C = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$  پس  $P = \frac{2}{3}\sqrt{2}$  و  $C = 2\sqrt{2}$

و چون  $\frac{C}{16} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{2}}$  پس  $P = \frac{2}{3}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

و قس علیهذا  $C_{12} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$  و غیره

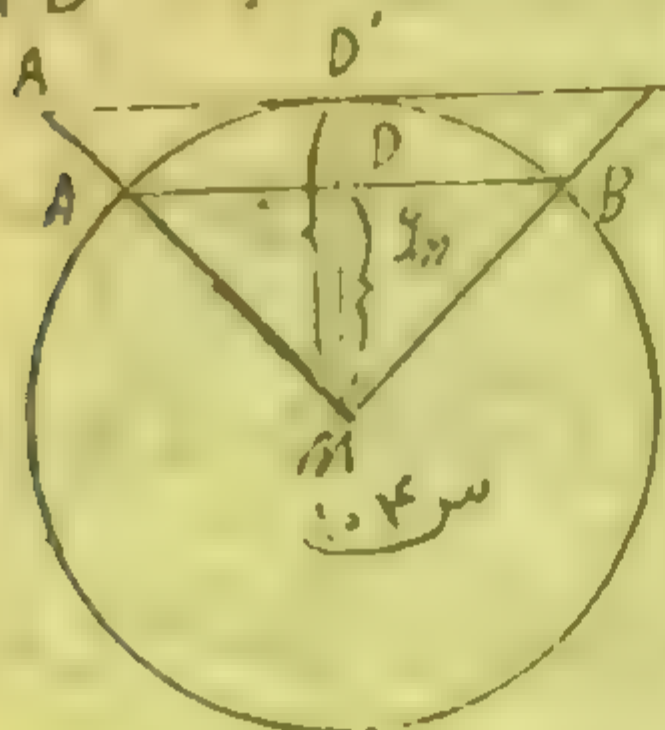
مثال ۲ -  $C = 2$  و  $C_9 = 2\sqrt{3}$  پس  $P = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

و چون  $\frac{C}{12} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$  پس  $P = \frac{2}{3}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

۴۱۵ - مسئله ۶ - ضلع  $C$  و شعاع  $2$  از کثیر الاضلاع محاسبات است  $K$  (ضلع کثیر الاضلاع محاسبات)

حل - دو مثلث  $MAB$  و  $MA'B'$  مساحت متساوی چون  $P$  و  $2$

دوار تقاع این دو مثلث میباشد این تناسب حاصل است  $\frac{A'B}{AB} = \frac{r}{\rho_n}$



$$\frac{K_n}{C_n} = \frac{r}{\rho_n}$$

ولذا  $K_n = \frac{r C_n}{\rho_n}$

و چون  $\rho_n = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - C_n^2}$

معلوم شود  $K_n = \frac{2r C_n}{\sqrt{4r^2 - C_n^2}}$

## فصل دوم - محاسبه محیط و مساحت دایره

### ۱ - دستور مساحت و محیط دایره

۴۱۶ - تعریف - حد بر تغییر مذکور مقدار ثابت معینی است که مقدار متغیر معینی

درین تغییر هر چه بخوایم بدان نزدیک شود لیکن هرگز مساوی با آن نگردد  
از این تعریف معلوم میشود که تفاوت باین متغیر و حد آن ممکن است از هر مقدار منفی  
کوچکتر گردد و بالعکس هر وقت تفاوت باین متغیر مفروض مقدار ثابت معینی تواند از هر مقدار  
مفروض کوچکتر گردد آن مقدار ثابت همان حد متغیر مفروض است

۴۱۷ - قضیه ۱۰۰ - محیط دایره حد محیط کثیر الاضلاع منتظم محاطی است  
بنابر آنکه عدد اضلاع بقصاعیت ترقی نموده از هر مقدار مفروضی بزرگتر گردد  
برهان - اولاً واضح است که محیط دایره همواره از محیط کثیر الاضلاع محاطی اعظم است

( زیرا ضلع کثیر الاضلاع مستقیم و لذا اقصی فاصله بین دو نقطه محیط است )

ثانیاً وقتی عدد اضلاع مضاعف شود محیط کثیر الاضلاع محیطی ترقی میکند ( زیرا هر ضلع کثیر الاضلاع

$n$  ضلعی اقصی است از مجموع دو ضلع کثیر الاضلاع  $n$  ضلعی ) و لهذا تفاوت محیط آن

با محیط دایره ثابت است و به تنزل میگذارد و ممکن است از هر مقدار منفی کوچکتر گردد

۴۱۸- نتیجه - میتوان دایره را کثیر الاضلاع مستطبی شمرد که وضلع او بی نهایت  $(\infty)$  باشد

۴۱۹- قضیه ۱۰۱- نسبت محیط دایره به قطر خود مقدار ثابت است

برهان - در دو دایره  $n$  ضلعی و  $n$  ضلعی مستطبی  $n$  ضلعی محیطی داریم

چنین دو کثیر الاضلاع متشابهند ( به دلیل ) پس اگر دو محیط را  $n$  و  $n'$  فرض کنیم

$$\text{این تناسب برقرار است } \frac{n}{2} = \frac{n'}{2} \quad (\text{ق ۸۸})$$

حال چون  $n$  متناهیست ترقی داریم و مرآت تضاعیف را به نهایت می رسانیم  $\frac{n}{2} \rightarrow \frac{n\infty}{2}$

لیکن موجب قضیه سابق  $\frac{n}{2}$  محیط دایره اول و  $\frac{n'}{2}$  محیط دایره ثانی است پس چون محیط

دایره را  $C$  و  $C'$  فرض کنیم نتیجی شود  $\frac{C}{2} = \frac{C'}{2}$  و بهر مطلوب

۴۲۰- قسرها را و عادت بر این جاری شد که نسبت محیط بقطر را  $\pi$  ( پی ) بنامند

۴۲۱- نتیجه ۱- طول محیط دایره مساویست با حاصل ضرب  $\pi$  در مقدار  $r$

زیرا چون بقسمة فوق  $\pi = \frac{C}{2r}$  از ضرب طرفین در  $2r$  حاصل میشود

$$C = 2 - 2 \cdot \pi$$



۴۲۲ - نتیجه ۲ - طول قوس مساویست با حاصل ضرب محیط در نسبت

درجات قوس به ۱۸۰ زیرا اگر عدد درجات قوس را به طول آنرا  $a$  فرض کنیم

چون محیط دایره ۳۶۰ است این تناسب حاصل میگردد

$$\frac{a}{360} = \frac{2\pi a}{2\pi \times 360}$$

که از آن استخراج میشود

$$a = \frac{2\pi a}{360} = \pi a \cdot \frac{2}{360}$$

۴۲۳ - نتیجه ۳ - مساحت دایره مساوی است با

حاصل ضرب  $\pi$  در مجذور شعاع

زیرا میتوان سطح دایره را مرکب از عدد بی نهایت مثلثات متساوی الساقین دانست که از دصل نفقات مختلفه محیط بر مرکز حاصل شده باشند و چون همه در ارتفاع مشترکند مساحت مجموعشان یعنی سطح دایره مساویست با مجموع قواعد آنها یعنی محیط

دایره در نصف ارتفاع مشترک هر یک پس  $\pi r = \frac{2}{r} \times \frac{1}{2} \times 2\pi r^2 = \pi r^2$

۴۲۴ - فرغ - چون  $\pi r^2 = \frac{C}{2} r = \pi r^2 \times (\frac{C}{2\pi r})$

یا  $(\frac{C}{2\pi r}) = \frac{1}{r}$  یعنی

مساحت دایره مساویست با مجذور نصف محیط ضرب در  $\pi$

(ضمناً معلوم است که سطح دایره حاصل ضرب نصف محیط است در شعاع  $r \times \frac{C}{2} = \pi r^2$ )

۴۲۵ - تعریف - قطاع دایره قتم است از سه دایره که نامش دو شعاع است

قوس محصور باشد و قطعه دایره قسمتی است از سطح آن که مابین قوس و وتر محصور است  
 ۴۲۶ - نتیجہ ۴ - مساحت قطاع مساویست با حاصل ضرب سطح

دایره و نسبت عدد درجات قوس قاعده آن به ۳۶۰

زیرا مساحت قطاعی که قوس قاعده اش ۱ است  $\frac{1}{360}$  سطح دایره خواهد بود

پس اگر قاعده قطاع به درجه باشد چون مساحت آن را به فرض کنیم معلوم میشود

$$که \quad \frac{360}{\pi} = \frac{\pi - \alpha}{\alpha}$$

۴۲۷ - فرع - میتوان گفت مساحت قطاع مساویست با حاصل ضرب

نسبت شعاع در طول قوس قاعده اش

$$زیرا \quad \frac{\pi - \alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{180} \times \frac{180}{\alpha} = \frac{\pi}{\alpha}$$

۴۲۸ - فرع - مساحت قطعه دایره فصل قطاعی است که شامل آن باشد بر مثلثی متساوی

السا قبل که قاعده اش و وتر این قطعه و قوسش و شعاع دایره باشد و بنا بر این محاسبه

وقتی بقواعد سابقه مکننت که وتر آن معلوم باشد مثلاً وتر قطعه ضلع کشیده الاضلاع

مستطیلی باشد که در محاسبه آن امکان دارد

ب - محاسبه

اگر قوس به درجه باشد و شعاع را واحد فرض کنیم معلوم میشود که

نصف محیط دایره است که شعاع آن واحد طول باشد پس برای محاسبه هر کافیت  
 نصف محیط چنین دایره را حساب کنیم و لهذا اکثر الاضلاع مستطلم محاطی و محیطی که محیطشان  
 قابل محاسبه باشد در این دایره محاط و محیط کنیم و بدینسان ۱۴۴ و ۱۵۳۶ عدد اضلاع  
 بقاعیف تقی داده محیط اکثر الاضلاع محاطی و محیطی را معلوم نمود و در جدولی ثبت میکنیم  
 و چون محیط دایره همواره با این دو اکثر الاضلاع واقع میشود و صحت که تقی اختلاف با این نیمه محیط اکثر الاضلاع  
 محیطی و نیمه محیط اکثر الاضلاع محاطی مقداری قلیل گردد میتوان هر یک مقدار تقریبی دانست  
 در جدول ذیل از سندس که ضلع محاطی آن واحد است شروع و اکثر الاضلاع ۱۵۳۶

عدد اضلاع $n$	نیمه محیط اکثر الاضلاع محاطی $\frac{1}{2} n =$	نیمه اکثر الاضلاع محیطی $\frac{1}{2} n =$
۶	۳	۳٫۴۶۱۰۱۶
۱۲	۳٫۱۰۵۸۲۸۵	۳٫۲۱۵۳۹۰۳
۲۴	۳٫۱۳۲۶۲۸۶	۳٫۱۵۹۶۵۹۹
۴۸	۳٫۱۲۹۳۵۰۲	۳٫۱۴۶۰۸۶۲
۹۶	۳٫۱۴۱۰۳۲۰	۳٫۱۴۲۷۱۴۶
۱۹۲	۳٫۱۴۱۴۵۲۵	۳٫۱۴۱۸۷۲۱
۳۸۴	۳٫۱۴۱۵۵۲۶	۳٫۱۴۱۶۶۲۸
۷۶۸	۳٫۱۴۱۵۸۲۹	۳٫۱۴۱۶۱۰۲
۱۵۳۶	۳٫۱۴۱۵۹۰۹	۳٫۱۴۱۵۹۷۰

صنعی توقف کرد و اینم چنانکه طالعیه میشود اختلاف با این دو نیمه محیط اکثر الاضلاع



۱۵۳۶ ضلعی محسبی و محلی از یک صد هزارم کوچتر است و بنا بر این چون مقدار  
کوچتر از یک صد هزارم را اعتنا نکنیم (یعنی صفر فرض کنیم) مقدار ۳۰ چنین است

۳ ۰ ۱۴ ۱۵۹

۴۳۰ - در محاسبات معمولی ۳۰ را ۱۴۱۶۳ قرار میدهند پس باید  
این عدد را اسواره حاضر اندهن داشت

۴۳۱ - عدد ۳۰ را عدد زیادی از هندسین حساب کرده اند اولین کسی که توجه

حساب این مقدار کرده ایشمیدس بوده که مقدار  $\frac{۲۲}{۷}$  را بدست آورد بعد

میوتس کس  $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$  که تا شش رقم اعشار با ۳۰ موافق است معلوم

نموده و اختصاص آن این است که ضبطش سهل است از اینقرار که اعداد فرد اول

۱ و ۳ و ۵ را هر یک دو مرتبه از چپ بر است می نویسیم آنوقت سه رقم سمت

را منخرج و سه رقم دیگر را صورت قرار میدهم

و پست ناده رقم و لو ولف ۳۵۵ رقم اعشار آنرا حساب کرده اند

و امروز ناده ۰۰۰ رقم اعشار آن بدست آمده لیکن وضاحت که در عمل بدست می آید

چهار یا پنج رقم استعمال میشود

اول دفعه در ۱۷۶۱ لا مبرست اتم بودن ۳۰ را ثابت نمود و این سند در

تاریخ ریاضیات اهمیت بی‌کمال دارد و در قرن ۱۹ سیحی برپا رسیدند و تا  
 نمود که رسم خطی مستقیم مساوی با یک بدو پرگار و ستاره و عبارت از آخری است و ربع دایره می

## مقرنات

۱- مطلوب است اثبات احکام ذیل

۱- اگر دو دایره دو زاویه مرکزی مساوی باشند و دو قوس مقابل بر نسبت دو شعاع  
 و دو قطاع نظیر بر نسبت مربع دو شعاعند (چنین دو قوس دو قطاع را متساوی گویند)

۲- در دو دایره وقتی دو قوس از حیث طول متساوی باشند و دو زاویه مرکزی مقابل  
 بر نسبت عکس دو شعاعند

۳- در دو دایره نسبت دو زاویه مرکزی مثل دو قوس متقابل بر شعاع نظیر خود باشند

۴- چون بر دو ضلع مثلث قائم الزاویه دو نیم دایره خارج و بر وتر نیم دایره منطبق بر سطح مثلث رسم کنیم  
 مابین آنها دو دایره تشکیل می‌شود که مجموعشان مساوی با مساحت مثلث است (هالین بقراط)

۵- نیم دایره مرسوم بر ضلع مربع محاطی با دایره دایره‌ای تشکیل میدهد که سطحش نصف مربع شعاع است

۶- مجموع مساحت چهار دایره که چهار قطعه دو وتر عمود بر یکدیگر از دایره مفروضه قطع کرده اند با

مساوی است با مساحت دایره مفروضه

۷- سطح اکتیل مستدیر (سطح محصور مابین دو محیط دو دایره تحت مرکز) مساوی

بمساحت دایره ایست که قطرش با دایره کوچکتر تماس و محیط دایره بزرگتر متشکل شود  
(شاعش واسطه بندی بین محسوس و تقاضی و شعاع اکل است)

ب - مطلوب است حل مسائل ذیل

مسئله ۱ - میخواهیم دایره رسم کنیم که محیطش  $n$  برابر محیط دایره

دایره مسند و ضعه که شاعش درست باشد

مسئله ۲ - میخواهیم کثیر الاضلاع منتظمی رسم کنیم که با شیار الاضلاع منتظم محاط

در دایره (م و م) متساویه باشد و محیطش  $2$  یا  $5$  یا  $7$  برابر محیط

بمساحت کثیر الاضلاع مسند و ضعی باشد

مسئله ۳ - میخواهیم سطح دایره مسند و ضعه را اولاً با دایره متحد المکرز تقسیم کنیم

ثانیاً با دو دایره متحد المکرز بر حسب دو متساوی منقسم سازیم ثالثاً با دو دایره متحد المکرز

بر نسبت  $2$  و  $3$  و  $4$  تقسیم کنیم

مسئله ۴ - دایره رسم کنید که نسبتش به دایره مسند و ضعه مثل  $3$  به  $4$  یا  $5$  به  $4$

یا  $3$  به  $5$  باشد

مسئله ۵ - دایره رسم کنید که مساحتش با دو مساحت  $4$  و  $5$

از دو دایره مسند و ضعه یکی از شش رابطه ذیل را داشته باشد



اولاً  $x + y = z$  و ثانياً  $x - y = z$  و ثالثاً  $x + 3y = z$   
 رابعاً  $x + 3y + 2z = 2$  و خامساً  $x + 2y = 3$  و ششم  $x + \frac{2}{3}y = \frac{2}{3}$

## حالت

۱- استعمال گونیا در ترسیمات هندسی - تعریف - گونیا  
 مثلثی قائم الزاویه که معمولاً از چوب می‌سازند و برای اخراج خطوط  
 متوازی و کار است و کیفیت استعمال آن از دو مسئله ذیل استنباط می‌شود

مسئله ۱- میخواهیم از نقطه A خطی موازی با BC رسم نمایم



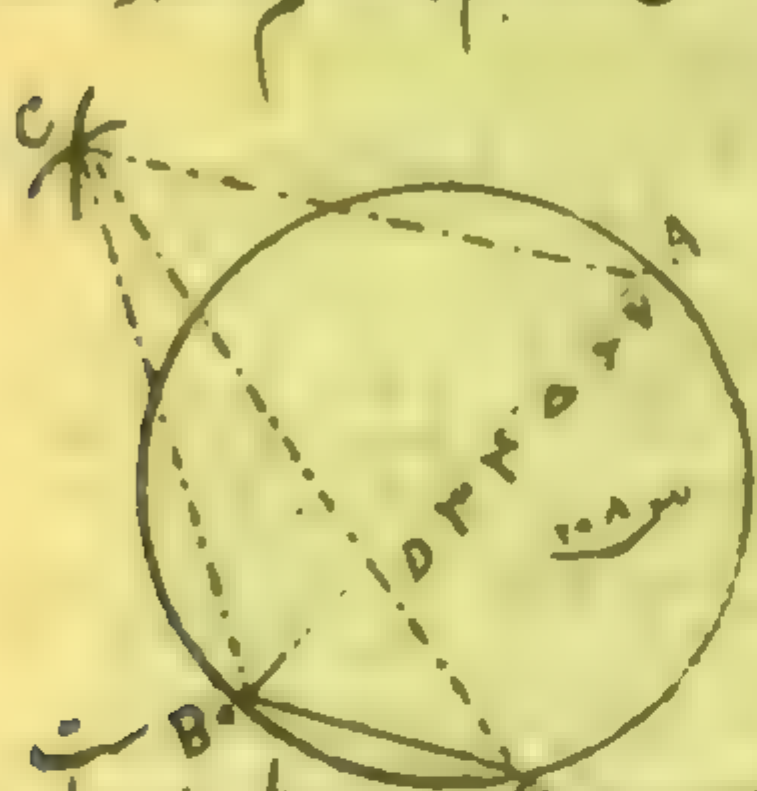
حل - گونیا را چنان قرار می‌دهیم  
 که در یک ضلعش بر خط BC منطبق باشد  
 و ستاره را چنانکه در شکل دیده می‌شود بر ضلع

دیگر گونیا تکیه داده آنوقت ستاره را ثابت نگاه داشته گونیا را در کنار آن می‌چرخانیم  
 تا ضلعی که بر BC منطبق بوده نقطه A بگذرد خطی که در کنار آن این ضلع رسم کنیم  
 بر نقطه A گذشته و با BC موازی خواهد بود (یا فرق دلیل بر خود متعلم است)

مسئله ۲ - میخواهیم از نقطه مشخصه عمودی بر خط مفروض  
 رسم کنیم



قاعده - به جهت تقسیم محیط دایره بر  $AC$  جزو قاعده می قطر  $AB$  سمت را رسم نمود  
آنرا بر  $AC$  جزو مساوی (۱) در شکل در راهت فرض کرده ایم (۱) منقسم ساخته و شش



مساوی الاضلاع  $ABC$  را رسم میکنیم  
(تسین نقطه  $C$  کافیت) حال جو نقطه دوم

تقسیم می نقطه  $D$  را به نقطه  $C$  وصل کنیم

است و این خط دایره را بر نقطه  $E$  قطع میکند و سپس  $BE$  مساوی با  $\frac{1}{3}$  محیط

تقریباً  $BE$  تقریباً ضلع کثیر الاضلاع  $\dots$  ضلعی است  $\times$

تقسیم - برای  $2, 4, 6$  و قاعده جواب تحقیقی میدهد

(ضمیمه)

۱ - پانتوگراف

۱ - پانتوگراف اسمانی است که برای رسم شیئی مشابه با شکل مفروض مشتمل

و اغلب برای کوچک یا بزرگ کردن نقشی یا بر گرد تصویر دیگر بکار میرود

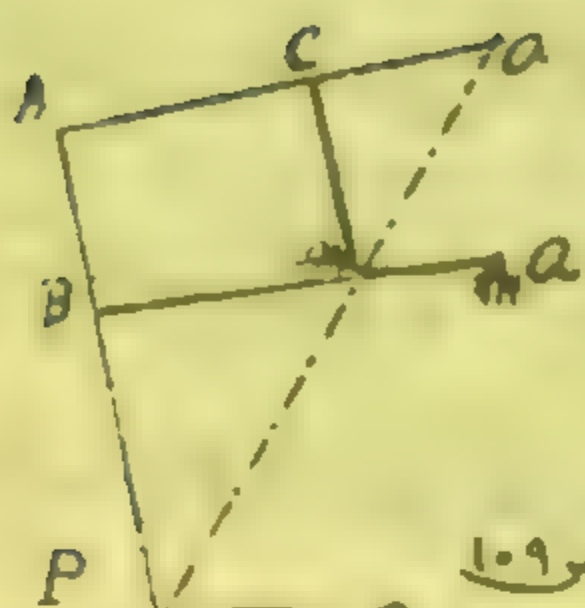
۲ - بن آلت اصولاً مرکب است از چهار ستاره  $AM$  و  $CA$  و

$CM$  و  $BM$  است که در انتهای  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $M$  مفصل

شده و به وسیله ذیلند اولاً شکل  $ABCE$  متوازی الاضلاع است



نات نقطه  $\sigma$   $m$   $m$  بر یک استقامتند



۳۔ بہولت دیدہ میٹو کہ اگر دوشتر

مربور برای وضع معینی وقوع پیدا کند

برای جیسع اوضاع دیگر محقق است

برای جیسع اوصاع دیگر محقق است  
 ۱۰۹  
 P Q  
 m  
 A B m C متوازی الاضلاع است و زاویه متقابلش متساوی خواهد  
 بود

بود و بنا بر این شکل در جمیع اوضاع متوازی الاضلاع میماند ثانیاً

بالفرض۔ نقطہ  $O$ ،  $m$ ، و  $m$  بر یک استقامتند پس دو مثلث

$AmO$ ,  $CmO$  قشایند و لذا

$$\frac{OA}{AM} = \frac{OC}{CM'}$$

اما طول این چهار قطعه خط ثابت است پس تناسب فوق برای جیب و اوضاع برقرار

همانند آنما نظر بتوازی  $AB$  و  $CM'$  و دو زاویه  $OAB$  و  $OCM'$  بمقارنه

مقایسه کنید پس دو مشت  $\sigma_{AM}$  و  $\sigma_{CM}$  بمحاوره متشابهند و بنا بر این دو

زاویه  $\angle OMN$  و  $\angle ONM$  در جميع اوضاع متساوی و بر یکدیگر منطبقند

یعنی نقطہ  $m$  و  $n$  و  $o$  بر یک استقامتند

۴ - از تشابه دائمی دو مثلث متغیر  $O C M$  و  $O A M$  معلوم میشود که همواره



$$\frac{OA}{OC} = \frac{OM}{OC}$$

لیکن دو طول  $OA$  و  $OC$  و لهذا نسبت  $\frac{OA}{OC}$  ثابت میماند پس نسبت

$\frac{OM}{OA}$  تغییر نمیکند و استعمال پانتوگراف مبنی بر همین خاصیت است

۵- فرض کنیم که نقطه  $O$  ثابت باشد و بر نقطه  $M$  مدادی نصب کرده باشیم

اگر نقطه  $M$  بر محیطی مثلثی مانند  $P \cdot M \cdot Q$  سیر کند نوک مداد مثل  $P \cdot M \cdot Q$  را که مشابه با  $P \cdot M \cdot Q$  است رسم خواهد نمود (نقطه  $O$  را مرکز ثقل بگیرند) زیرا مجموع متناهی

از وصل نقطه  $O$  ب نقاط مختلف  $P \cdot M \cdot Q$  حاصل میشود از قبیل  $O \cdot P \cdot M$

با نظایر خود از قبیل  $O \cdot P \cdot M$  مشابهند و دو شکل که از یک مدد مثلثات

مشابه و مشابه الی وضع ترکیب شده اند با نسبت مشابه  $\frac{OM}{OA}$  مشابه خواهند بود

۶- در عمل وضع پانتوگراف با آنچه گفتیم کمی متفاوت است و بعدا توضیح بر

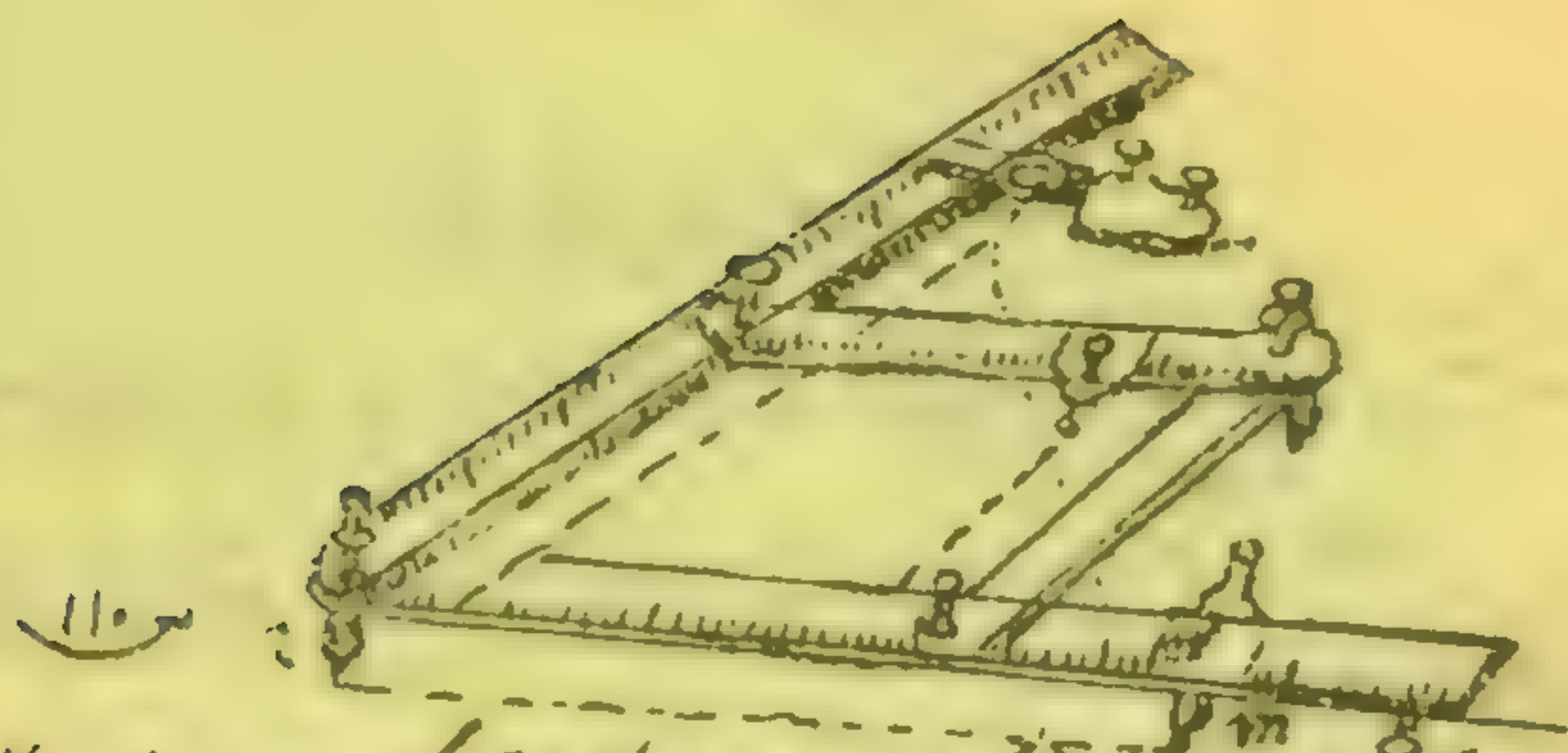
بعضی فروع است که باعث سهولت استعمال آن میشود از اینجهت:

نقطه  $O$  مرکز محوری است که در مفصل قرار دارد و سنبل این مفصل از یک

طرف بقطعه سرب سنگینی متصل است که محور و بنا بر این نقطه  $O$  را ثابت نگاه

میدارد و از طرف دیگر بکشی اتصال پیدا میکند که در طول است  $OA$

میگذرد و هر جا بخواهند بوسیله پیچ فشار محکم میشود (گاهی بجای قطعه



مردی قطعه چوبی دیده میشود که بوسیله چوب بزرگ متصل گردیده. محور را ثابت نگه میدارند  
طول ستاره را نیز تغییر نمیکند ولی در آن دو کسم بدو کثرت وصلند که در طول  
ستاره با قابل حرکت بواسطه چوب قمار محکم میشوند و بدین وسیله طول  $oc - on$   
را میتوان تغییر داد و نسبت تشابه را هر چه بخواهند فرار داد بدون این که نقطه  
 $o$  و  $m$  و  $n$  از یک استقامت خارج شوند

## ب- استعمال تشابه اشکال در متامحی نقشه برداری

۷- بفرض اینکه زمین سطح واقعی باشد مقصود از نقشه آن شلی است مثلاً شکل زمین  
که نسبت تشابه آن را متعاقب گویند. و عبارت دیگر متعاقب عبارت است  
از نسبت ابعاد نقشه با ابعاد واقعی شکل

۸- مقصود از متامحی تعیین وسعت زمین است بحسب واحد سطح  
۹- برداشتن نقشه عبارت است از سنجیدن تمام مسافتی که در آن  
آنها برای تعیین و رسم نقشه لازم باشد

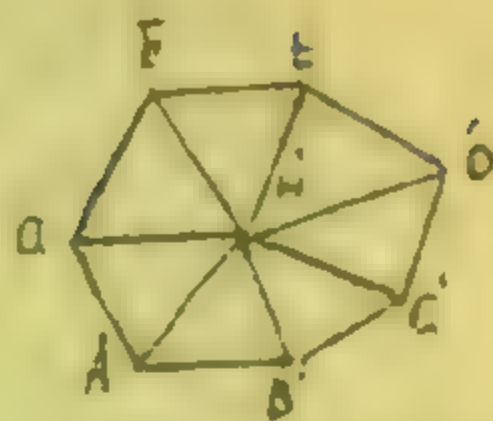
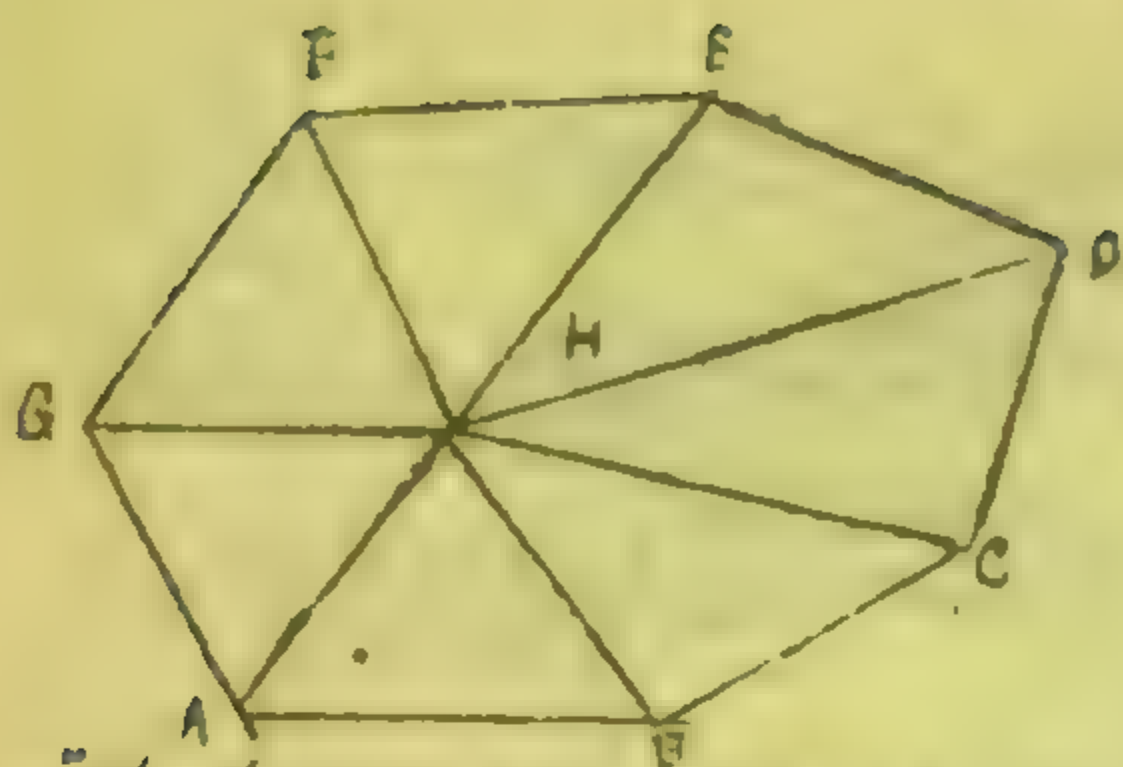


۱۰- نقشه برداری علمی است که وسائل برداشتن نقشه و رسم آنرا تعیین میکند و اساس آن قضایای راجعه به شباه اشکال است

۱۱- فعلا منظور ما بیان این نکته است که چگونه بوسیله سنجیدن یک خط طول ممکنست به دو قضایای مزبوره نقشه زمین را برداشته مساحت آن معلوم نمود

۱۲- فرض میکنیم بخواسیم نقشه زمینی را که شکل کثیر الاضلاع  $A B C D$  میلی متر روی نقشه فائش یک متر طول حقیقی فرض شود هر نقطه مانند  $H$  در داخل کثیر الاضلاع منضم نموده آنرا بر دو کس کثیر الاضلاع وصل میکنیم و ضلوع مثلثات  $H A B$  و  $H B C$  و غیره را بعد از تجزیه سامی که از تجزیه است بطول ده متر اندازه بگیریم و هر یک را در مقیاس (نسبت مشابه) ۱۰۰۰۰ ضرب میکنیم تا طول تحویلی آنها بدست آید

حال با طولهای تحویلی مثلثات  $H A B$  و  $H B C$  و غیره را رسم میکنیم تا از ترکیب آنها کثیر الاضلاع  $A' B' C' D' E' F'$  که نقشه مطلوب باشد حاصل گردد زیرا چنانکه میدانیم هرگاه دو کثیر الاضلاع مرکب باشند از یک خط مثلثات مشابه متشابه الوضع خود قشابه میشوند



۱۳- اگر مقصود مساحت کردن  $ABCDEFG$  باشد کافی است  
که مساحت  $ABCDEFG$  را معلوم نموده در عکس مجذور تقیاس ضرب  
کنیم (و مساحت شکل اخیر با مقام و انواع ممکنست حتی میتوان این شکل را از کاغذ  
بریده وزن آنرا معلوم کنیم و بر وزن یکت سیلیم مربع از همان کاغذ تقسیم نماییم)  
خارج قیمت دست زمین است بحسب ترمربع

۱۴- غالباً وقتی مقصود فقط مساحت باشد نقشه را رسم نمیکند بلکه بعد از برداشتن  
نقشه دست مثلثات  $HAB$  و غیره را از روی اضلاع حساب کرده آنها را  
جمع میکنند

۱۵- در مساحی بیشتر بعضی مثلثات و ذوزنقه قائم الزاویه بکار میبرند باین طریق

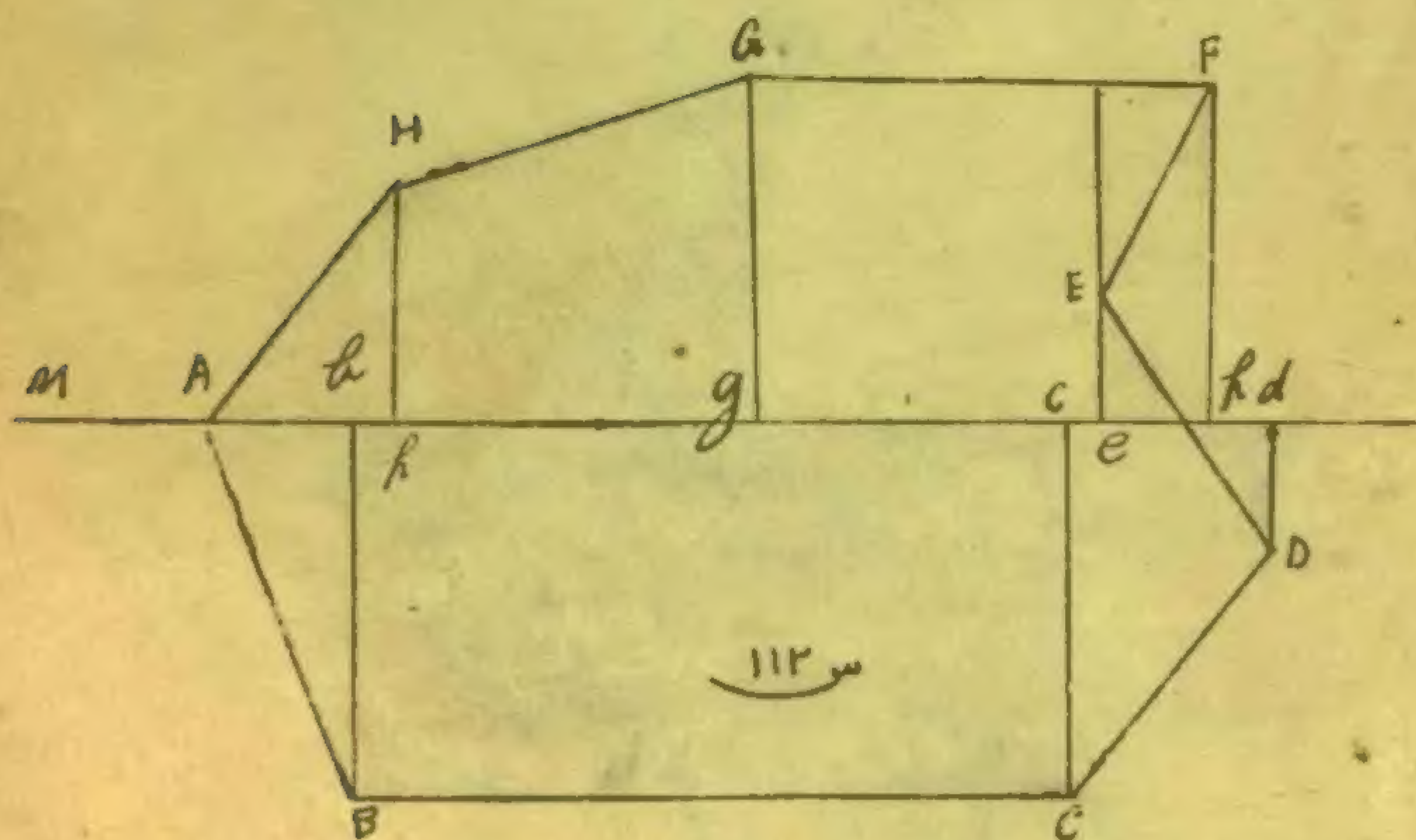
۱۶- برای مساحت کردن کثیرالاضلاع  $ABCDEFH$

۱۷- از روی این شکل عمودها بر خط احتیاری مانند  $mn$  فرد میآید  
(اغلب قطر المثلث کثیرالاضلاع را بجای  $mn$  احتیاری میکنند) تا شکل



به اوزنها و مثلثات تجزیه شود و آنها را مساحت کرده بر یکدیگر میسازند  
 و اگر در زلفته یا مثلثی در خارج شکل واقع باشد آن را منفی احتساب میکنند  
 پس مساحت مطلوب چنین است

$$J = ABh + AHh + HGgh + \dots$$





## جدول حروف یونانی

حرف	اسم	حرف	اسم	حرف	اسم	حرف	اسم	حرف	اسم	حرف	اسم
۴	نی	۲	ز	۷	نو	۷	نی	۷	اپیون	۷	آلفا
۵	خی	۳	زیگما	۸	کسی	۸	کاپا	۸	زتا	۸	پتا
۶	پتی	۴	تاو	۹	ایگرن	۹	لامدا	۹	ایتا	۹	کانا
۷	ایگما	۵	اوپسیون	۱۰	پی	۱۰	مو	۱۰	سیتا	۱۰	وینا

کتاب محمد جواد بن ملک الخطاطین الشریفی

در مطبعه (علی) بطبع رسیده

شمس (۱۳۰۹)





۱۳۱۵ آبان

کتابخانه ملی و موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی

تعداد ۷۰۰ نسخه و ۸۰۰ جلد

کتاب دوم

کتابخانه ملی و موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی

کتابخانه ملی و موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی

کتابخانه ملی و موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی

کتابخانه ملی و موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی

کتابخانه ملی و موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی

کتابخانه ملی و موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی

کتابخانه ملی و موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی

کتابخانه ملی و موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی

کتابخانه ملی و موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی

کتابخانه ملی و موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی



کتابخانه ملی و موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی

کتابخانه ملی و موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی



